UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2024/2
Prova da área IIA

1	2	3	4	Total

Nome: ____ **Cartão:** ________________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})\hat{s}$

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, ...$

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}x^n e^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x}\operatorname{sen}(wx)\,dx = \dfrac{e^{\lambda x}(\lambda\cos(wx) + w\operatorname{sen}(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n = 1, 2, 3...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2+w^2}$	$\frac{1}{w}\,\text{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\,\text{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\,\text{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt - \text{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\text{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{t}{2w}\,\text{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\text{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}, \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\text{sen}(at)\cosh(at) - \cos(at)\,\text{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\,\text{sen}(at)\,\text{senh}(at))$
27	$\frac{1}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^3}(\text{senh}(at) - \text{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
33	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\text{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \quad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\,\text{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\text{Si}\,(t)$
44	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a}+2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \text{sen}(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t+\frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert\,\text{sen}(wt)\rvert$
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t) = \frac{t}{a}, \quad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

- **Questão 1** (2.5 pontos) Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 7 - 2t, & 2 < t < 5 \\ t - 2, & 5 < t < 6 \\ 1, & t > 6. \end{cases}$$

Responda os itens abaixo.

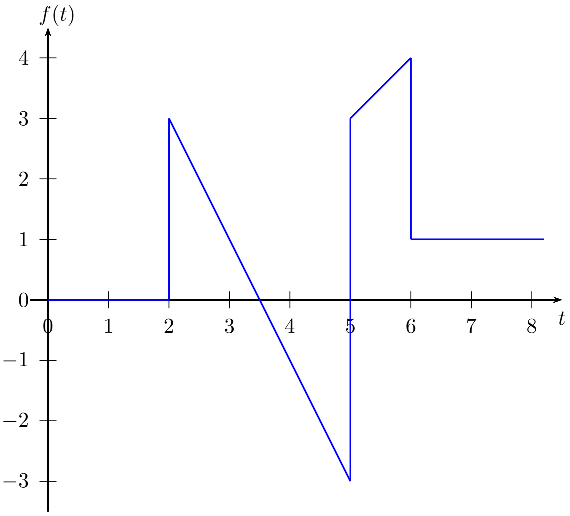
a) (0.5 ponto) Esboce os gráficos das funções $f(t)$ e $f'(t)$.

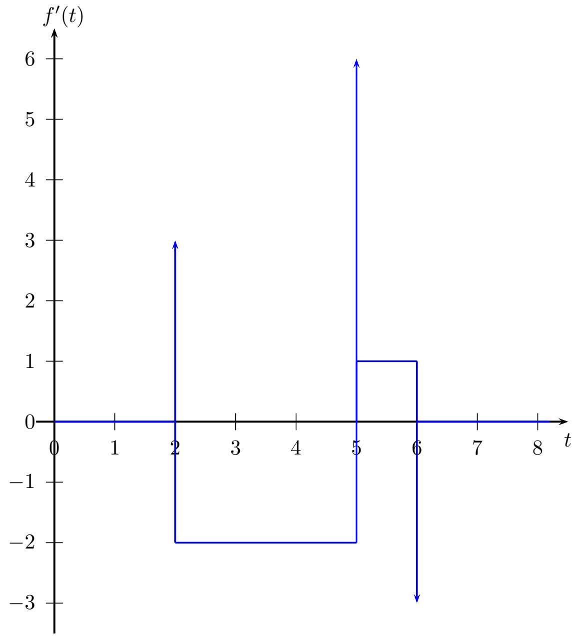
b) (0.75 ponto) Escreva expressões em termos de delta de Dirac e Heaviside para $f(t)$ e $f'(t)$.

c) (0.75 ponto) Calcule as transformadas de Laplace das funções $f(t)$ e $f'(t)$.

d) (0.5 ponto) Calcule a transformada de Laplace da função $tf(t)$.

Solução:





a)

b) Temos

$$\begin{aligned} f(t) &= (7-2t)u(t-2) + (t-2-(7-2t))u(t-5) + (1-(t-2))u(t-6) \\ &= (7-2t)u(t-2) + (3t-9)u(t-5) + (3-t)u(t-6). \end{aligned}$$

A derivada formal nos dá

$$\begin{aligned} f'(t) &= (7-2t)\delta(t-2) - 2u(t-2) + (3t-9)\delta(t-5) + 3u(t-5) + (3-t)\delta(t-6) - u(t-6) \\ &= 3\delta(t-2) - 2u(t-2) + 6\delta(t-5) + 3u(t-5) - 3\delta(t-6) - u(t-6), \end{aligned}$$

onde usamos a Propriedade da Filtragem. Alternativamente, você pode construir a $f'(t)$ direto do gráfico.

c) Escrevemos

$$\begin{aligned} f(t) &= (7-2t)u(t-2) + (3t-9)u(t-5) + (3-t)u(t-6) \\ &= -2(t-2)u(t-2) + 3u(t-2) + 3(t-5)u(t-5) + 6u(t-5) - (t-6)u(t-6) - 3u(t-6) \end{aligned}$$

e

$$f'(t) = 3\delta(t-2) - 2u(t-2) + 6\delta(t-5) + 3u(t-5) - 3\delta(t-6) - u(t-6),$$

e usamos a Propriedade da Translação no eixo t para calcular

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(3s-2)e^{-2s} + (3+6s)e^{-5s} - (1+3s)e^{-6s}}{s^2}$$

e

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{(3s-2)e^{-2s} + (3+6s)e^{-5s} - (1+3s)e^{-6s}}{s}$$

d) Temos,

$$\begin{aligned} tf(t) &= t(7-2t)u(t-2) + t(3t-9)u(t-5) + t(3-t)u(t-6) \\ &= (7t-2t^2)u(t-2) + (3t^2-9t)u(t-5) + (3t-t^2)u(t-6) \\ &= g(t-2)u(t-2) + h(t-5)u(t-5) + p(t-6)u(t-6) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} g(t-2) &= 7t-2t^2 \\ h(t-5) &= 3t^2-9t \\ p(t-6) &= 3t-t^2. \end{aligned}$$

Fazendo as respectivas translações, temos

$$\begin{aligned} g(t) &= 7(t+2) - 2(t+2)^2 = 7t + 14 - 2t^2 - 8t - 8 = -2t^2 - t + 6 \\ h(t) &= 3(t+5)^2 - 9(t+5) = 3t^2 + 30t + 75 - 9t - 45 = 3t^2 + 21t + 30 \\ p(t) &= 3(t+6) - (t+6)^2 = 3t + 18 - t^2 - 12t - 36 = -t^2 - 9t - 18. \end{aligned}$$

As transformadas de Laplace são

$$\begin{aligned} G(s) &= = -\frac{4}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{6}{s} = \frac{-4-s+6s^2}{s^3} \\ H(s) &= = \frac{6}{s^3} + \frac{21}{s^2} + \frac{30}{s} = \frac{6+21s+30s^2}{s^3} \\ P(s) &= = -\frac{2}{s^3} - \frac{9}{s^2} - \frac{18}{s} = \frac{-2-9s-18s^2}{s^3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{tf(t)\} &= G(s)e^{-2s} + H(s)e^{-5s} + P(s)e^{-6s} \\ &= \frac{(6s^2-s-4)e^{-2s} + (30s^2+21s+6)e^{-5s} + (-18s^2-9s-2)e^{-6s}}{s^3} \end{aligned}$$

Alternativamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{tf(t)\} &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{tf(t)\} \\ &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{(3s-2)e^{-2s} + (3+6s)e^{-5s} - (1+3s)e^{-6s}}{s^2}\right) \\ &= -\frac{d}{ds}\left((3s^{-1}-2s^{-2})e^{-2s} + (3s^{-2}+6s^{-1})e^{-5s} - (s^{-2}+3s^{-1})e^{-6s}\right) \\ &= 2(3s^{-1}-2s^{-2})e^{-2s} - (-3s^{-2}+4s^{-3})e^{-2s} \\ &+ 5(3s^{-2}+6s^{-1})e^{-5s} + (6s^{-3}+6s^{-2})e^{-5s} \\ &- 6(s^{-2}+3s^{-1})e^{-6s}) + (-2s^{-3}-3s^{-2})e^{-6s} \\ &= \frac{(6s^2-s-4)e^{-2s} + (30s^2+21s+6)e^{-5s} + (-18s^2-9s-2)e^{-6s}}{s^3}. \end{aligned}$$

- **Questão 2** (2.5 pontos) Calcule as transformadas inversas das funções abaixo.

a) (0.5 ponto)
$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+16}$$

b) (1.0 ponto)
$$F(s) = \frac{s}{s^2-2s+17}$$

c) (1.0 ponto)
$$F(s) = \frac{s^2-2s+1}{(s+1)^2(s^2+1)}$$

Solução:

a) Temos

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+1}{s^2+16} \\ &= \frac{s}{s^2+16} + \frac{1}{s^2+16}. \end{aligned}$$

Aplicando os itens 13 e 14 da tabela, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \cos(4t) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t)$$

b) Temos

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s}{s^2-2s+17} \\ &= \frac{s}{(s-1)^2+16} \\ &= \frac{s-1}{(s-1)^2+16} + \frac{1}{(s-1)^2+16}. \end{aligned}$$

Aplicando os itens 17 e 18 da tabela, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^t\cos(4t) + \frac{1}{4}e^t\operatorname{sen}(4t)$$

c) Separamos pelo método das fraoções parciais da forma

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2-2s+1}{(s+1)^2(s^2+1)} \\ &= \frac{A+Bs}{s^2+1} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2} \\ &= \frac{(A+Bs)(s+1)^2 + C(s^2+1)(s+1) + D(s^2+1)}{s^2+1)(s+1)^2} \\ &= \frac{As^2+2sA+A+Bs^3+2Bs^2+Bs+Cs^3+Cs^2+Cs+C+Ds^2+D}{(s^2+1)(s+1)^2} \\ &= \frac{s^3(B+C)+s^2(A+2B+C+D)+s(2A+B+C)+A+C+D}{(s^2+1)(s+1)^2} \end{aligned}$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} B+C=0 \\ A+2B+C+D=1 \\ 2A+B+C=-2 \\ A+C+D=1 \end{cases}$$

Substituímos $B = -C$ nas três últimas linhas para obter

$$\begin{cases} A - C + D = 1 \\ 2A = -2 \\ A + C + D = 1 \end{cases}$$

Temos $A = -1$ e

$$\begin{cases} -C + D = 2 \\ C + D = 2 \end{cases}$$

Logo, $D = 2$, $C = 0$, $B = 0$ e $A = -1$. Assim,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2 - 2s + 1}{(s+1)^2(s^2+1)} \\ &= \frac{-1}{s^2+1} + \frac{2}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

Aplicando os itens 13 e 8 da tabela, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\operatorname{sen}(t) + 2te^{-t}$$

• **Questão 3** (2.5 pontos): Considere a seguinte equação integral:

$$y(t) = t\,\text{sen}(t) + \int_0^t y(\tau)\,\text{sen}(t-\tau)d\tau.$$

Calcule a solução $y(t)$ usando a técnica de transformada de Laplace.

Solução: Aplicamos a transformada de Laplace na equação integral para obter

$$Y(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{Y(s)}{s^2+1},$$

onde usamos a Propriedade da Convolução e o item 22 da tabela. Assim,

$$\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)Y(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

Multiplicamos por (s^2+1) e obtemos

$$\left(s^2+1-1\right)Y(s) = \frac{2s}{(s^2+1)}.$$

Logo,

$$Y(s) = \frac{2}{s(s^2+1)}.$$

Aqui, podemos resolver por frações parciais, ou, alternativamente, fazendo

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2+2s^2-2s^2}{s(s^2+1)} \\ &= 2\frac{1+s^2}{s(s^2+1)} - 2\frac{s^2}{s(s^2+1)} \\ &= \frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y(t) = 2 - 2\cos(t)$$

• **Questão 4** (2.5 pontos) As concentrações de três reagentes A, B e C são dadas por $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, respectivamente. Considere a reação dada por:

$$A \longleftarrow B \longleftarrow C.$$

modelada por:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3y(t) \\ y'(t) &= 2z(t) - 3y(t) \\ z'(t) &= -2z(t) \end{aligned}$$

com $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 4$.

a) (1.25) Encontre expressões para $X(s)$, $Y(s)$ e $Z(s)$.

b) (1.25) Encontre $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.

Solução: Aplicamos transformada de Laplace para obter

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= 3Y(s) \\ sY(s) - y(0) &= 2Z(s) - 3Y(s) \\ sZ(s) - z(0) &= -2Z(s) \end{aligned}$$

Impomos as condições iniciais e obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned} sX(s) - 3Y(s) &= 0 \\ (s+3)Y(s) - 2Z(s) &= 0 \\ (s+2)Z(s) &= 4 \end{aligned}$$

O sistema é resolvido debaixo para cima:

$$Z(s) = \frac{4}{s+2},$$

$$Y(s) = \frac{2Z(s)}{s+3} = \frac{8}{(s+2)(s+3)}$$

e

$$X(s) = \frac{3Y(s)}{s} = \frac{24}{s(s+2)(s+3)}$$

Pelos itens 7 e 11 da tabela, temos:

$$z(t) = 4e^{-2t}$$

e

$$y(t) = \frac{8}{-2-(-3)}\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right) = 8\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)$$

Usamos a Propriedade da transformada da integral para calcular $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= 24\int_0^t y(\tau)d\tau \\ &= 24\int_0^t (e^{-2\tau} - e^{-3\tau})d\tau \\ &= 24\left[-\frac{e^{-2\tau}}{2} + \frac{e^{-3\tau}}{3}\right]_0^t \\ &= 24\left(-\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-3t}}{3}\right) - 24\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ &= 4 + 8e^{-3t} - 12e^{-2t}. \end{aligned}$$