**UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**
**Departamento de Matemática Pura e Aplicada**
**MAT01168 - Turma B - 2024/2**
**Prova da área IIA**

| 1 - 3 | 4 | 5 | Total |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Nome:** GABARITO **Cartão:** ____________

• **Questão 1.** Considere $y(t)$ tal que $\begin{cases} y' + 2y = e^{-2t}, & t > 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$.

É correto: (1.0pt)

( ) $Y(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2}$

(X) $Y(s) = \dfrac{2}{s+2} + \dfrac{1}{(s+2)^2}$

( ) $Y(s) = \dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{(s+2)^2}$

( ) $Y(s) = -\dfrac{2}{s+2} + \dfrac{1}{(s+2)^2}$

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (1.0pt)

(X) $y(t) = 2e^{-2t} + te^{-2t}$

( ) $y(t) = te^{-2t}$

( ) $y(t) = 2 + te^{-2t}$

( ) $y(t) = -2e^{-2t} + te^{-2t}$

( ) $y(t) = 2e^{-2t} + \dfrac{t^2e^{-2t}}{2}$

( ) nenhuma das anteriores

**Solução:**

$$sY - 2 + 2Y = \frac{1}{s+2} \Rightarrow (s+2)Y = 2 + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y = \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}$$
$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}\right) = 2e^{-2t} + te^{-2t}$$

---

• **Questão 2.** Seja $y(t)$ tal que $\begin{cases} y'' - y = e^{-t}, & t > 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$.

É correto: (1.0pt)

(X) $Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s+1)^2}$

( ) $Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)^3}$

( ) $Y(s) = \dfrac{1}{s^3-1}$

( ) $Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2(s+1)}$

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (1.0pt)

( ) $y(t) = -\dfrac{e^{-t}}{4} + \dfrac{te^{-t}}{2} + \dfrac{e^t}{4}$

(X) $y(t) = -\dfrac{e^{-t}}{4} - \dfrac{te^{-t}}{2} + \dfrac{e^t}{4}$

( ) $y(t) = \dfrac{e^{-t}}{4} - \dfrac{te^{-t}}{2} + \dfrac{e^t}{4}$

( ) $y(t) = \dfrac{t^2e^t}{2}$

( ) $y(t) = \dfrac{te^{-t}}{2}$

( ) nenhuma das anteriores

**Solução:** (a)

$$s^2Y - s(0) - 0 - Y = \frac{1}{s+1} \Rightarrow (s^2-1)Y = \frac{1}{s+1} \Rightarrow Y = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+1)} = \frac{1}{(s-1)(s+1)^2}$$

(b) Decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} = \frac{A(s+1)^2 + B(s-1)(s+1) + C(s-1)}{(s-1)(s+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow 1 = A(s+1)^2 + B(s-1)(s+1) + C(s-1) \quad \forall s$$
$$s = -1 \Rightarrow 1 = C(-1-1) \Rightarrow C = -1/2$$

$$s=1 \Rightarrow 1 = A(1+1)^2 \Rightarrow A = 1/4$$
$$s=0 \Rightarrow 1 = A(1) + B(-1) + C(-1) \Rightarrow B = -1 + A - C = -1 + 1/4 + 1/2 = -1/4$$

e segue

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)^2} = \frac{1/4}{s-1} - \frac{1/4}{s+1} + \frac{-1/2}{(s+1)^2}$$
$$y(t) = -\frac{e^{-t}}{4} - \frac{te^{-t}}{2} + \frac{e^t}{4}$$

---

• **Questão 3.** (A) (1.0pt) O PVI impulsivo com condições iniciais nulas $\begin{cases} y'' + 3y & = 3\delta(t) \\ y(0) = 0 & , y'(0) = 0 \end{cases}$ é equivalente (dois PVIs são equivalentes quando suas soluções possuem a mesma transformada de Laplace) a qual dos abaixo:

( ) $\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = 3 \quad & , y'(0) = 3 \end{cases}$

( ) $\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = e^3 \quad & , y'(0) = 0 \end{cases}$

( ) $\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \quad & , y'(0) = 1 \end{cases}$

( ) $\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \quad & , y'(0) = e^3 \end{cases}$

( ) $\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \quad & , y'(0) = -3 \end{cases}$

(X) nenhum dos anteriores

**Solução:** a transformada de Laplace do sistema do enunciado:

$$s^2Y + 3Y = 3(1) \Rightarrow Y(s) = \frac{3}{s^2+3}$$

que é transformada de Laplace de $y$ satisfazendo $\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \quad & , y'(0) = 3 \end{cases}$ e nenhuma outra das opções.

---

(B) (1.0pt) Sobre o regime de amortecimento do oscilador $\begin{cases} y'' + 4y' + 3y & = 1 \\ y(0) = 0 & , y'(0) = 1 \end{cases}$, é correto afirmar:

(X) é superamortecido

( ) é não-amortecido

( ) é subamortecido

( ) é assintoticamente amortecido

( ) é criticamente amortecido

( ) nenhuma das anteriores está correta

**Solução:** $my'' + \gamma y' + \kappa y = 0$ onde

$$\kappa - \frac{\gamma^2}{4m} = 3 - \frac{4^2}{4(1)} = 3 - 4 < 0$$

então o sistema é superamortecido.

---

• **Questão 4.** Sejam $y(t)$ tal que $\begin{cases} y' + y = 2\cos(t) & , t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$.

(A) É correto: (1.0pt)

( ) $Y(s) = \dfrac{2s}{s^3+1}$

( ) $Y(s) = \dfrac{2}{(s+1)(s^2+1)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{2s}{(s+1)^3}$

( ) $Y(s) = \dfrac{2}{(s+1)^3}$

(X) $Y(s) = \dfrac{2s}{(s+1)(s^2+1)}$

( ) nenhuma das anteriores

(B) (1.0pt) Obtenha $y(t)$ usando sua transformada de Laplace $Y(s)$.

**Solução:** (A)

$$sY - 0 + Y = \frac{2s}{s^2+1} \Rightarrow Y = \frac{2s}{(s+1)(s^2+1)}$$

(B) decomposição de frações parciais

$$\frac{2s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{A(s^2+1)+(Bs+C)(s+1)}{(s+1)(s^2+1)}$$

implica $2s = A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1)$ para todo $s$

$s = -1$ implica $-2 = A(2) + 0 \Rightarrow A = -1$

$s = 0$ implica $0 = A(1) + C(1) \Rightarrow C = -A = 1$

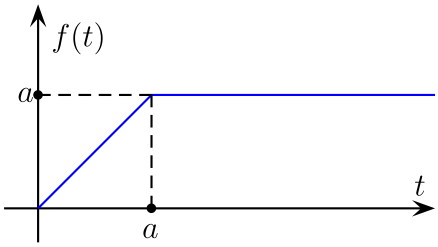
$s = 1$ implica $2 = A(2) + B(2) + C(2) \Rightarrow B = 1 - A - C \Rightarrow B = 1$

Finalmente $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2+1}\right) = -e^t + \cos(t) + \operatorname{sen}(t)$

---

• **Questão 5** Seja $a$ um parâmetro positivo. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$\begin{cases} y' + 2y = f(t) & ,t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ onde $f(t)$, que depende de $a$, é determinada como abaixo:




**(A).**(1.0pt) Obtenha $F(s) = \mathcal{L}(f)$ para $a > 0$.
**(B).**(1.0pt) Obtenha a solução $y(t)$, usando a resposta da parte **(A)**, para $a = 1$.
**Bom Trabalho**

**Solução:** (A)

$$f'(t) = \begin{cases} 1 & ,0 < t < a \\ 0 & ,t > a \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}(f') = \int_0^a (1)e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^a = \frac{1-e^{-sa}}{s}$$

Por outro lado: $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - 0 = s\mathcal{L}(f)$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\mathcal{L}(f')}{s} = \frac{1-e^{-sa}}{s^2}$$

(B) Ainda

$$sY - 0 + 2Y = \mathcal{L}(f) \Rightarrow (s+2)Y = \frac{1-e^{-sa}}{s^2} \Rightarrow Y = \frac{1-e^{-sa}}{s^2(s+2)} \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1-e^{-sa}}{s^2(s+2)}\right)$$

e prosseguimos por etapas, de início aplicando a propriedade de transformada da integral

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = e^{-2t} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right) = \int_0^t e^{-2u}du = \left[\frac{e^{-2u}}{-2}\right]_0^t = \frac{1-e^{-2t}}{2}$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+2)}\right) = \int_0^t \frac{1-e^{-2u}}{2}du = \left[\frac{u}{2} + \frac{e^{-2u}}{4}\right]_0^t = \frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}-1}{4}$

Fazendo $a = 1$, temos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1-e^{-s}}{s^2(s+2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+2)}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^2(s+2)}\right) =$$
$$\frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}-1}{4} - u(t-1)\left(\frac{t-1}{2} + \frac{e^{-2(t-1)}-1}{4}\right)$$

onde $u(\cdot)$ é a função degrau unitário.

□