UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2025/1
Prova da área IIA

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\text{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\text{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\text{sen}(x+y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)$	

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(v)dv$

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\text{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, \ldots$

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\text{Si}\,(t) = \int_0^t \dfrac{\text{sen}(x)}{x} dx$

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} \mathrm{d}x + C$
$\int x \cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\,\text{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\,\text{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\text{sen}(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x}\,\text{sen}(w x)\,dx = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda \cos(wx) + w\,\text{sen}(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\dfrac{1}{s}$	1
2	$\dfrac{1}{s^2}$	t
3	$\dfrac{1}{s^n}, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\dfrac{1}{\sqrt{s}},$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$
6	$\dfrac{1}{s^k}, \quad (k > 0)$	$\dfrac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\dfrac{1}{(s-a)^n}, \quad (n = 1, 2, 3...)$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\dfrac{1}{(s-a)^k}, \quad (k > 0)$	$\dfrac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
12	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
13	$\dfrac{1}{s^2 + w^2}$	$\dfrac{1}{w}\,\mathrm{sen}(wt)$
14	$\dfrac{s}{s^2 + w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\dfrac{1}{s^2 - a^2}$	$\dfrac{1}{a}\,\mathrm{senh}(at)$
16	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\dfrac{1}{(s-a)^2 + w^2}$	$\dfrac{1}{w}e^{at}\,\mathrm{sen}(wt)$
18	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\dfrac{1}{s(s^2 + w^2)}$	$\dfrac{1}{w^2}(1 - \cos(wt))$
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$	$\dfrac{1}{w^3}(wt - \mathrm{sen}(wt))$
21	$\dfrac{1}{(s^2 + w^2)^2}$	$\dfrac{1}{2w^3}(\mathrm{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
22	$\dfrac{s}{(s^2 + w^2)^2}$	$\dfrac{t}{2w}\,\mathrm{sen}(wt)$
23	$\dfrac{s^2}{(s^2 + w^2)^2}$	$\dfrac{1}{2w}(\mathrm{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
24	$\dfrac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)},$ $(a^2 \neq b^2)$	$\dfrac{1}{b^2 - a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\dfrac{1}{(s^4 + 4a^4)}$	$\dfrac{1}{4a^3}[\mathrm{sen}(at)\cosh(at) -$ $- \cos(at)\,\mathrm{senh}(at)]$
26	$\dfrac{s}{(s^4 + 4a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^2}\,\mathrm{sen}(at)\,\mathrm{senh}(at))$
27	$\dfrac{1}{(s^4 - a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\mathrm{senh}(at) - \mathrm{sen}(at))$
28	$\dfrac{s}{(s^4 - a^4)}$	$\dfrac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
30	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\dfrac{a-b}{2}t\right)$
31	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\dfrac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1 + 2at)$
33	$\dfrac{1}{(s^2 - a^2)^k}, \quad (k > 0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\dfrac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k > 0)$	$\dfrac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\dfrac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \quad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\dfrac{s-a}{s-b}\right)$	$\dfrac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\dfrac{s^2 + w^2}{s^2}\right)$	$\dfrac{2}{t}(1 - \cos(wt))$
41	$\ln\left(\dfrac{s^2 - a^2}{s^2}\right)$	$\dfrac{2}{t}(1 - \cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\dfrac{w}{s}\right)$	$\dfrac{1}{t}\,\mathrm{sen}(wt)$
43	$\dfrac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\mathrm{Si}\,(t)$
44	$\dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t + 2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\dfrac{1}{as^2}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\dfrac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t + 2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\dfrac{w}{(s^2 + w^2)\left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \mathrm{sen}(wt), & 0 < t < \dfrac{\pi}{w} \\ 0, & \dfrac{\pi}{w} < t < \dfrac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \dfrac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\dfrac{w}{s^2 + w^2}\coth\left(\dfrac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert\,\mathrm{sen}(wt)\rvert$
48	$\dfrac{1}{as^2} - \dfrac{e^{-as}}{s\,(1 - e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t) = \dfrac{t}{a}, \quad 0 < t < a$ $f(t) = f(t - a), \quad t > a$

• **Questão 1** (2.5 pontos) Um certo medicamento é absorvido instantaneamente e permanece homogeneamente distribuído na corrente sanguínea depois de administrado. O modelo é exponencial com uma taxa de metabolização de $\tau = 3$h. Considere a situação onde a concentração inicial é nula, isto é, $c(0) = 0$ e o indivíduo tomou três doses da substância, a primeira em $t = 0$, a segunda em $t = 3$h e a última em $t = 6$h, todas com concentração $c_0 = 4$ mg/l. O modelo matemático é dado por

$$c'(t) + \frac{1}{3}c(t) = 4\delta(t) + 4\delta(t-3) + 4\delta(t-6)$$

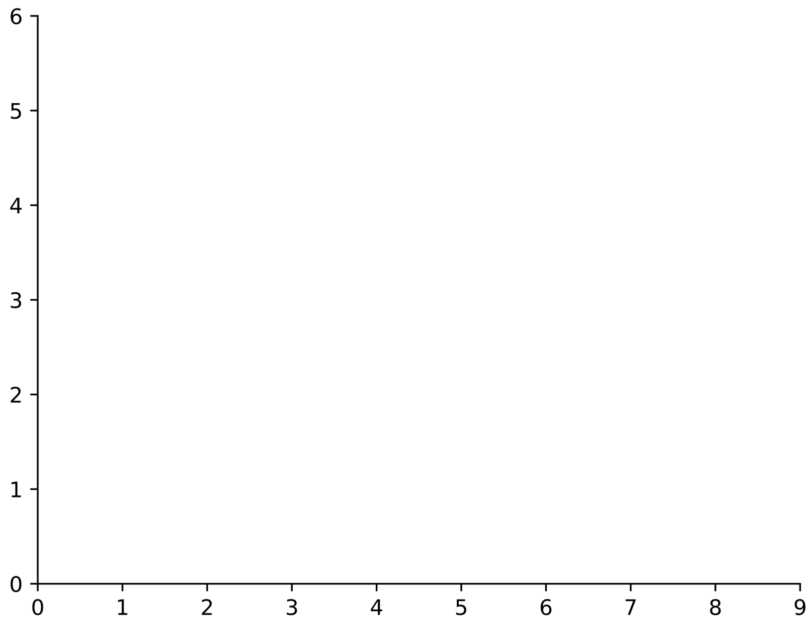
a) (0.75 ponto) Calcule a transformada de Laplace $C(s) = \mathcal{L}\{c(t)\}$.

b) (0.75 ponto) Calcule a solução do problema dado pela transformada de Laplace inversa $c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}$.

c) (0.5 ponto) Complete a tabela abaixo com os valores solicitados.

$\lim\limits_{t\to 0^-} c(t)$	
$\lim\limits_{t\to 0^+} c(t)$	
$c(2)$	
$\lim\limits_{t\to 3^-} c(t)$	
$\lim\limits_{t\to 3^+} c(t)$	
$c(5)$	
$\lim\limits_{t\to 6^-} c(t)$	
$\lim\limits_{t\to 6^+} c(t)$	
$c(9)$	

d) (0.5 ponto) Faça um esboço do gráfico de $c(t)$ usando os eixos abaixo.



Solução: a) Aplicamos a transformada de Laplace para resolver o problema. Temos

$$sC(s) - c(0) + \frac{1}{3}C(s) = 4 + 4e^{-3s} + 4e^{-6s}.$$

Como $c(0) = 0$, temos

$$\left(s + \frac{1}{3}\right) C(s) = 4 + 4e^{-3s} + 4e^{-6s}.$$

Logo,

$$C(s) = \frac{4 + 4e^{-3s} + 4e^{-6s}}{\left(s + \frac{1}{3}\right)}.$$

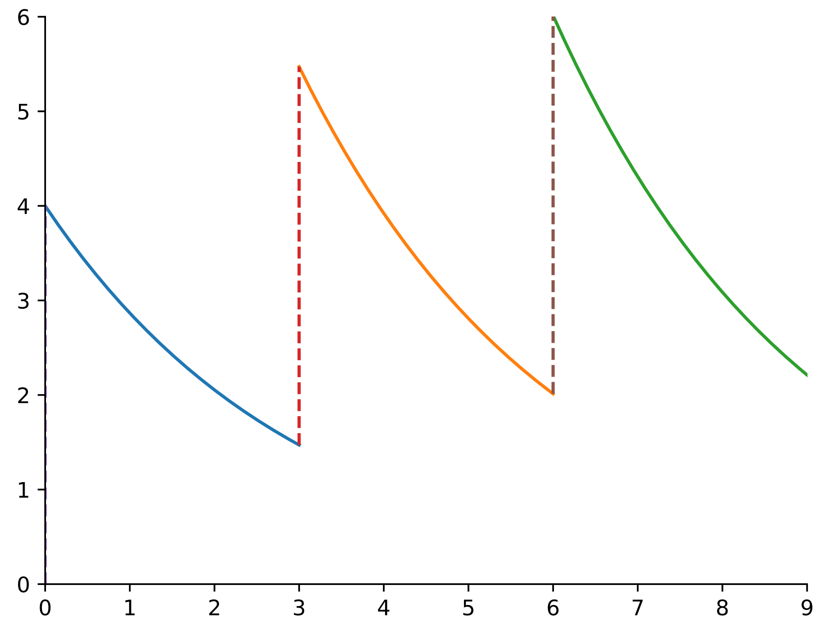
Solução: b) A tranformada inversa é calculada pelo item 7 da tabela, combinada com a propriedade da translação em t:

$$c(t) = 4u(t)e^{-t/3} + 4u(t-3)e^{-(t-3)/3} + 4u(t-6)e^{-(t-6)/3}.$$

Solução: c)

$\lim_{t\to 0^-} c(t)$	0
$\lim_{t\to 0^+} c(t)$	4
$c(2)$	$4e^{-2/3}$
$\lim_{t\to 3^-} c(t)$	$4e^{-1}$
$\lim_{t\to 3^+} c(t)$	$4e^{-1} + 4$
$c(5)$	$4e^{-5/3} + 4e^{-2/3}$
$\lim_{t\to 6^-} c(t)$	$4e^{-2} + 4e^{-1}$
$\lim_{t\to 6^+} c(t)$	$4e^{-2} + 4e^{-1} + 4$
$c(9)$	$4e^{-3} + 4e^{-2} + 4e^{-1}$

Solução: d)



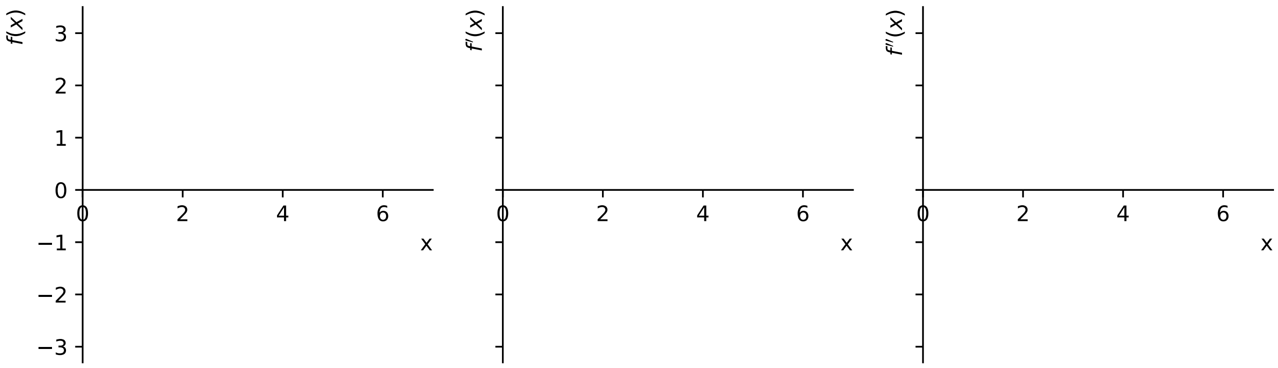
• **Questão 2** (2.5 pontos) Dada a função

$$f(t) = (t-1)u(t-1) - (t-3)^2u(t-3) + (t-5)^2u(t-5) + 3(t-5)u(t-5),$$

resolva os itens abaixo.

a) (0.5 ponto) Calcule $f'(t)$ e $f''(t)$.

b) (1.0 ponto) Esboce os gráficos de $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$ nos eixos abaixo.



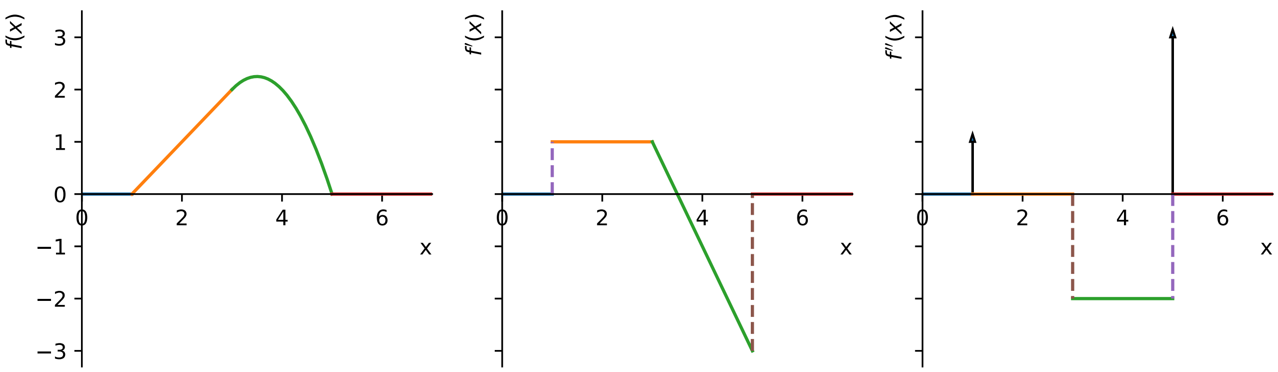
c) (1.0 ponto) Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$, $\mathcal{L}\{f'(t)\}$, $\mathcal{L}\{f''(t)\}$.

Solução a)

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t-1)\delta(t-1) + u(t-1) - (t-3)^2\delta(t-3) - 2(t-3)u(t-3) \\ &+ (t-5)^2\delta(t-5) + 2(t-5)u(t-5) + 3(t-5)\delta(t-5) + 3u(t-5) \\ &= u(t-1) - 2(t-3)u(t-3) + 2(t-5)u(t-5) + 3u(t-5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= \delta(t-1) - 2(t-3)\delta(t-3) - 2u(t-3) + 2(t-5)\delta(t-5) + 2u(t-5) + 3\delta(t-5) \\ &= \delta(t-1) - 2u(t-3) + 2u(t-5) + 3\delta(t-5). \end{aligned}$$

Solução b)



Solução c) Usamos a propriedade da translação no eixo t para calcular as transformadas de Laplace.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{se^{-s} - 2e^{-3s} + (2+3s)e^{-5s}}{s^3}.$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{se^{-s} - 2e^{-3s} + (2+3s)e^{-5s}}{s^2}.$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \frac{se^{-s} - 2e^{-3s} + (2+3s)e^{-5s}}{s}.$$

- **Questão 3** (2.5 ponto) Considere a função

$$f(t) = wt - \operatorname{sen}(wt).$$

a) (0.5 ponto) Mostre que $f(t)$ satisfaz a equação $f''(t) + w^2 f(t) = w^3 t$, com $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$.

b) (1.0 ponto) Calcule a transformada de Laplace de $f(t)$ aplicando a transformada de Laplace na equação do item a) [*Dica: use o item 20 para verificar suas contas*].

c) (1.0 ponto) Calcule a transformada de Laplace de $\dfrac{f(t)}{t}$ usando a propriedade 11. [*Se precisar, use as identidades*

$$\int \frac{w^3}{x^2(s^2+x^2)}dx = -\frac{x\arctan(x/w)+w}{x} + C \qquad e \qquad \frac{d(\arctan(x/w))}{dx} = \frac{w}{x^2+w^2}.$$

]

Solução a) De fato, $f'(t) = w - w\cos(wt)$ e $f''(t) = w^2\operatorname{sen}(wt)$. Assim, $f''(t) + w^2 f(t) = w^3 t$. Também, $f(0) = w\cdot 0 - \operatorname{sen}(0) = 0$ e $f'(0) = w - w\cos(0) = 0$.

Solução b) Aplicamos a transformada de Laplace para obter

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) + w^2F(s) = \frac{w^3}{s^2}.$$

Assim,

$$F(s) = \frac{w^3}{s^2(s^2+w^2)}.$$

Solução c) A propriedade 11 nos dá

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(v)dv,$$

onde

$$F(s) = \frac{w^3}{s^2(s^2+w^2)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} &= \int_s^\infty F(v)dv \\
&= \left[-\frac{w+v\arctan(v/w)}{v}\right]_s^\infty \\
&= \lim_{v\to\infty}\left[-\frac{w+v\arctan(v/w)}{v}\right] - \left[-\frac{w+s\arctan(s/w)}{s}\right].
\end{aligned}$$

Vamos resolver o primeiro limite usando a regra de L'Hopital

$$\begin{aligned}
\lim_{v\to\infty}\left[-\frac{w+v\arctan(v/w)}{v}\right] &= \lim_{v\to\infty}\left[-\frac{v\frac{w}{v^2+w^2}+\arctan(v/w)}{1}\right] \\
&= \lim_{v\to\infty}\left[-\frac{vw}{v^2+w^2} - \arctan(v/w)\right] \\
&= -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = -\frac{\pi}{2} + \frac{w+s\arctan(s/w)}{s}.$$

• **Questão 4** (2.5 ponto) A temperatura em um forno industrial evolui no tempo conforme o seguinte modelo simplificado:

$$\begin{cases} v'(t) = -2(v(t) - T_a) + q(t) \\ q(t) = 2\displaystyle\int_0^t (T_f - v(\tau))d\tau + (T_f - v(t)) \\ v(0) = 20 \end{cases}$$

onde $v(t)$ representa a temperatura medida no forno, $T_a = 20^0$C é temperatura ambiente, $T_f = 100^0$C é temperatura de controle, $q(t)$ é a potência de aquecimento. Use as técnicas das transformadas de Laplace para resolver o problema acima.

a) (1.5) Calcule as transformadas de Laplace $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$ e $Q(s) = \mathcal{L}\{q(t)\}$ e preencha os retângulos abaixo:

V(s) =	Q(s) =

b) (1.0) Calcule $v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$ e $q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}$ e preencha os retângulos abaixo:

v(t) =	q(t) =

Solução: **a)** Substituindo os valores, temos:

$$\begin{cases} v'(t) = -2v(t) + 40 + q(t) \\ q(t) = 2\displaystyle\int_0^t (100 - v(\tau))d\tau + 100 - v(t) \\ v(0) = 20 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema usando transformada de Laplace:

$$\begin{cases} sV - 20 = -2V + \dfrac{40}{s} + Q \\ \\ Q = \dfrac{2}{s}\left(\dfrac{100}{s} - V(s)\right) + \dfrac{100}{s} - V \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, temos:

$$sV - 20 = -2V + \frac{40}{s} + \frac{2}{s}\left(\frac{100}{s} - V(s)\right) + \frac{100}{s} - V.$$

Logo,

$$(s^2 + 3s + 2)V = 140 + \frac{200}{s} + 20s$$

e

$$\begin{aligned} V &= \frac{20s^2 + 140s + 200}{s(s^2 + 3s + 2)} \\ &= \frac{20(s^2 + 7s + 10)}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{20(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{20(s+5)}{s(s+1)} \\ &= \frac{100}{s} - \frac{80}{s+1}. \end{aligned}$$

Também,

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{2}{s}\left(\frac{100}{s} - V(s)\right) + \frac{100}{s} - V \\
&= \frac{200}{s^2} - \frac{2}{s}\left(\frac{100}{s} - \frac{80}{s+1}\right) + \frac{100}{s} - \left(\frac{100}{s} - \frac{80}{s+1}\right) \\
&= \frac{200}{s^2} - \frac{200}{s^2} + \frac{160}{s(s+1)} + \frac{100}{s} - \frac{100}{s} + \frac{80}{s+1} \\
&= \frac{160}{s(s+1)} + \frac{80}{s+1} \\
&= \frac{160}{s} - \frac{160}{s+1} + \frac{80}{s+1} \\
&= \frac{160}{s} - \frac{80}{(s+1)}.
\end{aligned}
$$

As transformadas inversas são:

$$
\begin{aligned}
v(t) =& 100 - 80e^{-t} \\
q(t) =& 160 - 80e^{-t}.
\end{aligned}
$$