UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - P2X2S
Prova da área IIA

1 - 4	5	6	Total

Nome: GABARITO **Cartão:** ________________

Nesta prova $u(\cdot)$ representa a função degrau unitário.

• **Questão 1.** Marque a alternativa correta.

(A) Sobre $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\pi^2+s^2}\right\}$, é correto:

( ) $\frac{\cos(\pi t)}{\pi}$

( ) $\operatorname{sen}(\pi t)$

( ) $\cos(\pi t)$

(X) $\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi}$

( ) $\frac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi}$

(B) Sobre $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{\pi^2+s^2}\right\}$, é correto:

( ) $u(t-1)\frac{\cos(\pi t)}{\pi}$

(X) $-u(t-1)\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi}$

( ) $u(t-1)\operatorname{sen}(\pi(t-1))$

( ) $u(t-1)\cos(\pi(t-1))$

( ) $u(t-1)\frac{e^{\pi(t-1)}-e^{-\pi(t-1)}}{2\pi}$

Solução: (A) aplique form. linha 13
(B) aplique prop. 4 com $a=1$,
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{\pi^2+s^2}\right\} = \frac{u(t-1)\operatorname{sen}(\pi(t-1))}{\pi}$
mas
$\operatorname{sen}(\pi(t-1)) = \operatorname{sen}(\pi t-\pi) = \operatorname{sen}(\pi t)\cos(\pi) - \operatorname{sen}(\pi)\cos(\pi t) = -\operatorname{sen}(\pi t)$
(C) temos $m=1, \gamma=4, k=4$ e assim $k-\frac{\gamma^2}{4m} = 4-\frac{4^2}{4(1)} = 0$ caso criticamente amortecido

(C) Sobre o regime de amortecimento do oscilador $\begin{cases} y''+4y'+4y &= 1 \\ y(0)=0 & , y'(0)=1 \end{cases}$, é correto:

( ) é superamortecido

( ) é subamortecido

(X) é criticamente amortecido

( ) é não-amortecido

( ) é assintoticamente amortecido

( ) é exponencialmente amortecido

• **Questão 2.** Considere a função $f(t)$ definida abaixo

$$f(t) = \begin{cases} t & ,0<t<1 \\ 2-t & ,1<t\le 2 \\ 0 & ,t>2 \end{cases}$$

(A) Sobre representação para f, é correto:

(X) $f = tu(t) + 2(1-t)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$

( ) $f = tu(t) + (2-t)u(t-1)$

( ) $f = tu(t) + (2-2t)u(t-1) + (2-t)u(t-2)$

( ) $f = tu(t) + (2-t)u(t-1) + u(t-2)$

( ) $f = tu(t) + (2-t)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$

( ) nenhuma das anteriores

(B) Sobre $\mathcal{L}\{f(t)\}$, é correto:

( ) $\frac{1-e^{-s}}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s}$

( ) $\frac{1}{s} + \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{2e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2}$

(X) $\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}$

( ) $\frac{1}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$

( ) $\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução de (B): rescreve $f = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$ e aplica a prop. linha 4
$F(s) = \frac{1}{s^2} - 2e^{-1s}\frac{1}{s^2} + e^{-2s}\frac{1}{s^2} = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}$

• **Questão 3.** Considere $F(s) = \frac{s^2-6s+4}{s^3-3s^2+2s}$.

(A) Sobre $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ é correto:

( ) $1+e^t+e^{2t}$

( ) $2+\operatorname{senh}(t)-\operatorname{senh}(\sqrt{2}t)$

( ) $1+\operatorname{sen}(t)-\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)$

( ) $2u(t)+e^{-t}-2e^{-2t}$

(X) $2+e^t-2e^{2t}$

( ) nenhuma das anteriores

(B) Sobre $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-3)\}$ é correto:

( ) $u(t-3)(2+e^t-2e^{2t})$

( ) $u(t-3)(2+e^{3-t}-2e^{6-2t})$

( ) $2+e^{t-3}-2e^{2(t-3)}$

( ) $2+e^{3-t}-2e^{6-2t}$

( ) $u(t-3)(2+\operatorname{senh}(t-3)-\operatorname{senh}(2t-6))$

(X) nenhum dos anteriores

Solução:
(A) fatorando o denominador temos: $s(s^2-3s+2) = s(s-1)(s-2)$
decomposição em frações parciais produz $F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}$
onde são encontrados $A=2$, $B=1$ e $C=-2$
(B) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-3)\} = e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\{F\} = e^{3t}\left(2+e^t-2e^{2t}\right)$

• **Questão 4.** Considere y tal que $\begin{cases} ty' - \dfrac{3y}{2} = 3 & ,t > 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

(A) sobre solução particular y_p para a EDO contida acima, é correto:

( ) $y_p = 3$ (X) $y_p = -2$

( ) $y_p = 3t$ ( ) $y_p = -2t$

( ) $y_p = 3t^{-1}$ ( ) nenhuma das anteriores

Solução (A): como o termo não homogêneo é constante, procuramos por uma solução particular constante, então $y_p' = 0$ produz $t(0) - 3y_p/2 = 3 \Rightarrow y_p = -2$

(B) sendo $U' = \dfrac{dU}{ds}$ a derivada da transformada da respectiva solução homogênea, é correto:

(X) $\dfrac{U'}{U} = -\dfrac{5/2}{s}$ ( ) $\dfrac{U'}{U} = -\dfrac{1/2}{s-1}$

( ) $\dfrac{U'}{U} = -\dfrac{3/2}{s}$ ( ) $\dfrac{U'}{U} = -\dfrac{1/2}{s+1}$

( ) $\dfrac{U'}{U} = -\dfrac{1/2}{s}$ ( ) nenhuma das anteriores

Solução (B): sol homogênea u satisfaz $tu' - \dfrac{3u}{2} = 0$

$-\dfrac{d}{ds}(sU - 0) = \dfrac{3U}{2} \Leftrightarrow -sU' - U = \dfrac{3U}{2} \Leftrightarrow \dfrac{U'}{U} = \dfrac{-5/2}{s}$

(C) Obtenha a solução $y(t)$ do PVI usando transformada de Laplace.

Solução: integrando, $\ln(U) = C - \dfrac{5}{2}\ln(s) = C + \ln(s^{-5/2})$, C constante indeterminada

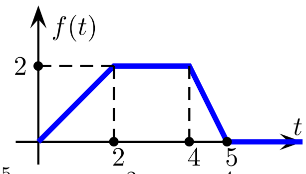
$\Rightarrow U = C_1 s^{-5/2} \Rightarrow u = \mathcal{L}^{-1}(U) = C_2 t^{3/2}$ (aplicamos linha 6 com $k = 5/2$) então solução geral é $y = C_2 t^{3/2} - 2$ então $y(1) = 2$ implica $C_2 - 2 = 2$ e segue $y(t) = 4t^{3/2} - 2$.

• **Questão 5.** Para $f(t)$ dada à direita, considere y satisfazendo

$\begin{cases} y'' + y = f(t) & ,t > 0 \\ y(0) = 0 & ,y'(0) = 0 \end{cases}$

(A) Obtenha $F(s)$, a transformada de Laplace de $f(t)$.

(B) Usando transformada de Laplace, obtenha $y(t)$.



Solução: (A) $\mathcal{L}(f') = \displaystyle\int_0^2 (1)e^{-st}dt + \int_4^5 (-2)e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^2 - 2\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_4^5 = \frac{1 - e^{-2s} - 2e^{-4s} + 2e^{-5s}}{s}$ então $s\mathcal{L}(f) - 0 = \dfrac{1 - e^{-2s} - 2e^{-4s} + 2e^{-5s}}{s}$ implica $\mathcal{L}(f) = \dfrac{1 - e^{-2s} - 2e^{-4s} + 2e^{-5s}}{s^2}$

Por outro lado, usando degraus, tanto $f = tu(t) - (t-2)u(t-2) - 2(t-4)u(t-4) + 2(t-5)u(t-5)$ quanto $f' = u(t) - u(t-2) - 2u(t-4) + 2u(t-5)$ conduzem diretamente à expressão acima.

(B) $s^2Y + Y = F(s) \Rightarrow Y = \dfrac{F(s)}{s^2+1} = \dfrac{1 - e^{-2s} - 2e^{-4s} + 2e^{-5s}}{s^2(s^2+1)}$

Observamos $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right) = \operatorname{sen}(t)$, que implica $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right) = \displaystyle\int_0^t \operatorname{sen}(u)du = 1 - \cos(t)$ # prop da linha 5

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}\right) = \displaystyle\int_0^t (1 - \cos(u))du = t - \operatorname{sen}(t)$ # pode usar a linha 20 e obter diretamente

Finalmente, $y(t) = t - \operatorname{sen}(t) - u(t-2)\left[t - 2 - \operatorname{sen}(t-2)\right] + 2u(t-4)\left[t - 4 - \operatorname{sen}(t-4)\right] - 2u(t-5)\left[t - 5 - \operatorname{sen}(t-5)\right]$

• **Questão 6.** Considere o seguinte problema de valor inicial (aqui $\delta(t)$ é Delta de Dirac):

$\begin{cases} x' = -x - 2y + \delta(t) \\ y' = x - y + \delta(t) \end{cases}$ com $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$. Aqui $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $y' = \dfrac{dy}{dt}$.

(A) Aplicando a Transformada de Laplace, obtenha um sistema de equações entre as quantidades s, $X = \mathcal{L}\{x\}$ e $Y = \mathcal{L}\{y\}$. Obtenha a solução desse sistema de equações.

(B) Obtenha $x(t)$ e $y(t)$ via transformada inversa.

Solução: (A) já que $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$, segue $\begin{cases} sX + X + 2Y = 1 \\ -X + sY + Y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s+1)X + 2Y = 1 \\ -X + (s+1)Y = 1 \end{cases}$

Cálculo de X: sist equiv $\begin{cases} (s+1)^2X + 2(s+1)Y = s+1 \\ 2X - 2(s+1)Y = -2 \end{cases} \Rightarrow [(s+1)^2+2]X = s+1-2 \Rightarrow X(s) = \dfrac{s-1}{(s+1)^2+2}$

Cálculo de Y: sist equiv $\begin{cases} (s+1)X + 2Y = 1 \\ -(s+1)X + (s+1)^2Y = s+1 \end{cases} \Rightarrow [(s+1)^2+2]Y = s+1+1 \Rightarrow Y(s) = \dfrac{s+2}{(s+1)^2+2}$

(B) Finalmente, identificando $w = \sqrt{2}$, aplicamos a transformação inversa

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}X(s) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+1}{(s+1)^2+2} - \dfrac{2}{(s+1)^2+2}\right) = e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) - \dfrac{2e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}Y(s) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+1}{(s+1)^2+2} + \dfrac{1}{(s+1)^2+2}\right) = e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) + \dfrac{e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}$

$\square$