UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - P2J2S
Prova da área IIA

1 - 3	4	5	Total

Nome: GABARITO Alt. correta marcada com (X); meio-acerto marcado com (–), quando aplicável.

• **Questão 1.** Seja $y(t)$ tal que $\begin{cases} y'' - y = e^{-t}, & t > 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$.

(A) É correto:

(X) $Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s+1)^2}$

( ) $Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)^3}$

( ) $Y(s) = \dfrac{1}{s^3-1}$

( ) $Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2(s+1)}$

( ) nenhuma das anteriores

(B) É correto:

(–) $y(t) = -\dfrac{e^{-t}}{4} + \dfrac{te^{-t}}{2} + \dfrac{e^t}{4}$

(X) $y(t) = -\dfrac{e^{-t}}{4} - \dfrac{te^{-t}}{2} + \dfrac{e^t}{4}$

(–) $y(t) = \dfrac{e^{-t}}{4} - \dfrac{te^{-t}}{2} + \dfrac{e^t}{4}$

( ) $y(t) = \dfrac{t^2e^t}{2}$

( ) $y(t) = \dfrac{te^{-t}}{2}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: (a)

$$s^2Y - s(0) - 0 - Y = \frac{1}{s+1} \Rightarrow (s^2-1)Y = \frac{1}{s+1} \Rightarrow Y = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+1)} = \frac{1}{(s-1)(s+1)^2}$$

(b) Decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} = \frac{A(s+1)^2 + B(s-1)(s+1) + C(s-1)}{(s-1)(s+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow 1 = A(s+1)^2 + B(s-1)(s+1) + C(s-1) \quad \forall s$$
$$s = -1 \Rightarrow 1 = C(-1-1) \Rightarrow C = -1/2$$
$$s = 1 \Rightarrow 1 = A(1+1)^2 \Rightarrow A = 1/4$$
$$s = 0 \Rightarrow 1 = A(1) + B(-1) + C(-1) \Rightarrow B = -1 + A - C = -1 + 1/4 + 1/2 = -1/4$$

e segue

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)^2} = \frac{1/4}{s-1} - \frac{1/4}{s+1} + \frac{-1/2}{(s+1)^2}$$
$$y(t) = -\frac{e^{-t}}{4} - \frac{te^{-t}}{2} + \frac{e^t}{4}$$

• **Questão 2.** (A) O PVI impulsivo com condições iniciais nulas $\begin{cases} y'' + 3y & = 3\delta(t) \\ y(0) = 0 & , y'(0) = 0 \end{cases}$ é equivalente (dois PVIs são equivalentes quando suas soluções possuem a mesma transformada de Laplace) a qual dos abaixo:

( ) $\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = 3 \quad , y'(0) = 3 \end{cases}$

( ) $\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = 3 \quad , y'(0) = 0 \end{cases}$

(–) $\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \quad , y'(0) = 1 \end{cases}$

( ) $\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = -3 \quad , y'(0) = 0 \end{cases}$

( ) $\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \quad , y'(0) = -3 \end{cases}$

(X) nenhum dos anteriores

Solução: a transformada de Laplace do sistema do enunciado:

$$s^2Y + 3Y = 3\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 3 \Rightarrow Y(s) = \frac{3}{s^2+3}$$

que é transformada de Laplace de y satisfazendo $\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \quad , y'(0) = 3 \end{cases}$ e nenhuma outra das opções.

(B) Sobre o regime de amortecimento do oscilador $\begin{cases} y'' + 4y' + 3y & = 1 \\ y(0) = 0 & , y'(0) = 1 \end{cases}$, é correto afirmar:

(X) é superamortecido

( ) é subamortecido

( ) é criticamente amortecido

( ) é não-amortecido

( ) é assintoticamente amortecido

( ) nenhuma das anteriores está correta

Solução: $my'' + \gamma y' + \kappa y = 0$ onde

$$\kappa - \frac{\gamma^2}{4m} = 3 - \frac{4^2}{4(1)} = 3 - 4 < 0$$

então o sistema é superamortecido.

• **Questão 3.** Sejam $y(t)$ tal que $\begin{cases} y' + y = 2\cos(t) & ,t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$.

(A) É correto:

( ) $Y(s) = \dfrac{2s}{s^3+1}$

( ) $Y(s) = \dfrac{2s}{(s+1)^3}$

(X) $Y(s) = \dfrac{2s}{(s+1)(s^2+1)}$

(–) $Y(s) = \dfrac{2}{(s+1)(s^2+1)}$

( ) $Y(s) = \dfrac{2}{(s+1)^3}$

( ) nenhuma das anteriores

(B) Obtenha $y(t)$ usando sua transformada de Laplace $Y(s)$.

Solução: (A)

$$sY - 0 + Y = \frac{2s}{s^2+1} \Rightarrow Y = \frac{2s}{(s+1)(s^2+1)}$$

(B) decomposição de frações parciais

$$\frac{2s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1)}{(s+1)(s^2+1)}$$

implica $2s = A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1)$ para todo s

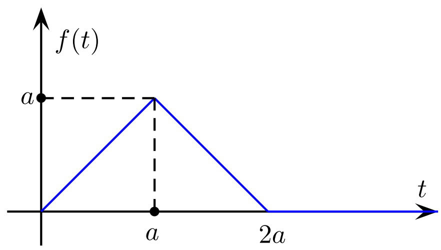
$s = -1$ implica $-2 = A(2) + 0 \Rightarrow A = -1$

$s = 0$ implica $0 = A(1) + C(1) \Rightarrow C = -A = 1$

$s = 1$ implica $2 = A(2) + B(2) + C(2) \Rightarrow B = 1 - A - C \Rightarrow B = 1$

Finalmente $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{s+1}{s^2+1}\right) = -e^{-t} + \cos(t) + \text{sen}(t)$

• **Questão 4.** Seja a um parâmetro positivo. Considere o seguinte problema de valor inicial:
$\begin{cases} y' + 2y = f(t) & ,t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ onde $f(t)$, que depende de a, é determinada como abaixo:



(A). Obtenha $F(s) = \mathcal{L}(f)$ para $a > 0$.
(B). Obtenha a solução $y(t)$, usando a resposta da parte **(A)**, para $a = 1$.
Bom Trabalho

Solução: (A)

$$f'(t) = \begin{cases} 1 & ,0 < t < a \\ -1 & ,a < t < 2a \\ 0 & ,t > 2a \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}(f') = \int_0^a (1)e^{-st}dt - \int_a^{2a} (1)e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^a - \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^{2a} =$$

$$\frac{1 - e^{-sa}}{s} - \frac{e^{sa} - e^{-2sa}}{s} = \frac{1 - 2e^{-sa} + e^{-2sa}}{s}$$

Alternativamente $f' = (u(t) - u(t-a)) - (u(t-a) - u(t-2a)) = u(t-2a) - 2u(t-a) + u(t)$ também implica $\mathcal{L}(f') = \dfrac{1 - 2e^{-sa} + e^{-2sa}}{s}$

Por outro lado: $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - 0 = s\mathcal{L}(f)$ implica $\mathcal{L}(f) = \dfrac{\mathcal{L}(f')}{s} = \dfrac{1 - 2e^{-sa} + e^{-2sa}}{s^2}$

(B) Ainda, fazendo $a = 1$ na resposta da parte (A)

$$sY - 0 + 2Y = \mathcal{L}(f) \Rightarrow (s+2)Y = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} \Rightarrow Y = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2(s+2)} \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2(s+2)}\right)$$

e prosseguimos por etapas, de início aplicando a propriedade de transformada da integral

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = e^{-2t} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right) = \int_0^t e^{-2u}du = \left[\frac{e^{-2u}}{-2}\right]_0^t = \frac{1-e^{-2t}}{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+2)}\right) = \int_0^t \frac{1-e^{-2u}}{2}du = \left[\frac{u}{2}+\frac{e^{-2u}}{4}\right]_0^t = \frac{t}{2}+\frac{e^{-2t}-1}{4}$$

Portanto,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2(s+2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+2)}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^2(s+2)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2(s+2)}\right) =$$
$$\frac{t}{2}+\frac{e^{-2t}-1}{4} - 2u(t-1)\left(\frac{t-1}{2}+\frac{e^{-2(t-1)}-1}{4}\right) + u(t-2)\left(\frac{t-2}{2}+\frac{e^{-2(t-2)}-1}{4}\right)$$

onde $u(\cdot)$ é a função degrau unitário.

Questão 5. Sabendo $x(0)=1$, $y(0)=2$, resolva o seguinte sistema de EDOs
$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x+3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x+2y \end{cases}$ para $t>0$, obtendo e usando as respectivas transformadas de Laplace $X(s)$ e $Y(s)$.

Solução:

$$\begin{cases} sX-1 = -2X+3Y \\ sY-2 = -3X+2Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s+2)X = 1+3Y \\ (s-2)Y = 2-3X \end{cases}$$

e isolamos Y via

$$(s-2)Y = 2-3\left(\frac{1}{s+2}+\frac{3Y}{s+2}\right) \Rightarrow (s-2)Y = \frac{2s+4-3}{s+2} - \frac{9Y}{s+2}$$
$$\Rightarrow \frac{(s-2)(s+2)+9}{s+2}Y = \frac{2s+1}{s+2} \Rightarrow Y = \frac{2s+1}{s^2+5}$$

e segue $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2s+1}{s^2+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2s}{s^2+5}+\dfrac{1}{s^2+5}\right) = 2\cos(\sqrt{5}\ t) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}(\sqrt{5}\ t)$.

Por outro lado, isolando X,

$$(s+2)X = 1+3\left(\frac{2}{s-2}-\frac{3X}{s-2}\right) \Rightarrow (s+2)X = \frac{s-2+6}{s-2} - \frac{9X}{s-2}$$
$$\Rightarrow \frac{(s-2)(s+2)+9}{s-2}X = \frac{s+4}{s-2} \Rightarrow X = \frac{s+4}{s^2+5}$$

e segue $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+4}{s^2+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+5}+\dfrac{4}{s^2+5}\right) = \cos(\sqrt{5}\ t) + \dfrac{4}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}(\sqrt{5}\ t)$.

□