

1	2	3	4	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\text{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\text{sen}(x + y) = \text{sen}(x) \cos(y) + \text{sen}(y) \cos(x)$	
$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \text{sen}(x) \text{sen}(y)$	

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t - a) f(t - a)\} = e^{-as} F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolação	$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(v) dv$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\text{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1, m \neq 0, 1, 2, \dots$

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m + \nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \text{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \text{sen}(\lambda x) dx = \frac{\text{sen}(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x} \text{sen}(w x) dx = \frac{e^{\lambda x} (\lambda \cos(w x) + w \text{sen}(w x))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (ae^{at} - be^{bt})$
13	$\frac{1}{s^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} \text{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	$\text{cos}(wt)$
15	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \text{sinh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\text{cosh}(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} e^{at} \text{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$	$e^{at} \text{cos}(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^2} (1 - \text{cos}(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^3} (wt - \text{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3} (\text{sen}(wt) - wt \text{cos}(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{t}{2w} \text{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w} (\text{sen}(wt) + wt \text{cos}(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}, \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2 - a^2} (\text{cos}(at) - \text{cos}(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3} [\text{sen}(at) \text{cosh}(at) - \text{cos}(at) \text{sinh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} \text{sen}(at) \text{sinh}(at)$
27	$\frac{1}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^3} (\text{sinh}(at) - \text{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} (\text{cosh}(at) - \text{cos}(at))$

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} (e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{-\frac{(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at} (1 + 2at)$
33	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)} \left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s} e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \text{cos}(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \text{sinh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s} \ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \quad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t} (e^{bt} - e^{at})$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \text{cos}(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \text{cosh}(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t} \text{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s} \cot^{-1}(s)$	$\text{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda quadrada</p> $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda triangular</p> $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2 + w^2) \left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	<p>Retificador de meia onda</p> $f(t) = \begin{cases} \text{sen}(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2 + w^2} \coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	<p>Retificador de onda completa</p> $f(t) = \text{sen}(wt) $
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	<p>Onda dente de serra</p> $f(t) = \frac{t}{a}, \quad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

• **Questão 1** (3.0 pontos) As concentrações de três reagentes A , B e C são dadas por $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, respectivamente. Considere a reação dada por:



modelada por:

$$\begin{aligned}x'(t) &= 7y(t) \\y'(t) &= 6z(t) - 7y(t) \\z'(t) &= -6z(t)\end{aligned}$$

com $x(0) = 0$, $y(0) = 2$ e $z(0) = 2$.

- a) (1.5) Encontre expressões para $X(s)$, $Y(s)$ e $Z(s)$.
b) (1.5) Encontre $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.

Solução: Aplicamos transformada de Laplace para obter

$$\begin{aligned}sX(s) - x(0) &= 7Y(s) \\sY(s) - y(0) &= 6Z(s) - 7Y(s) \\sZ(s) - z(0) &= -6Z(s)\end{aligned}$$

Impomos as condições iniciais e obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned}sX(s) - 7Y(s) &= 0 \\(s + 7)Y(s) - 6Z(s) &= 2 \\(s + 6)Z(s) &= 2\end{aligned}$$

O sistema é resolvido de baixo para cima:

$$Z(s) = \frac{2}{s + 6},$$

$$Y(s) = \frac{2 + 6Z(s)}{s + 7} = \frac{2}{s + 7} + \frac{12}{(s + 6)(s + 7)} = \frac{2s + 24}{(s + 6)(s + 7)}$$

e

$$X(s) = \frac{7Y(s)}{s} = \frac{7(2s + 24)}{s(s + 6)(s + 7)}$$

Usando o item 7 da tabela, temos:

$$z(t) = 2e^{-6t}.$$

Agora, aplicando os itens 11 e 12, temos:

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{2}{-6 - (-7)} (-6e^{-6t} - (-7e^{-7t})) + \frac{24}{-6 - (-7)} (e^{-6t} - e^{-7t}) \\&= 2(-6e^{-6t} + 7e^{-7t}) + 24(e^{-6t} - e^{-7t}) \\&= \frac{6}{4}e^{-6t} - \frac{2}{4}e^{-7t} \\&= 12e^{-6t} - 10e^{-7t}.\end{aligned}$$

Usamos a Propriedade da transformada da integral para calcular $x(t)$:

$$\begin{aligned}x(t) &= 7 \int_0^t y(\tau) d\tau \\&= 7 \int_0^t (12e^{-6\tau} - 10e^{-7\tau}) d\tau \\&= 7 \left[-12 \frac{e^{-6\tau}}{6} + 10 \frac{e^{-7\tau}}{7} \right]_0^t \\&= [-14e^{-6\tau} + 10e^{-7\tau}]_0^t \\&= (-14e^{-6t} + 10e^{-7t}) - (-14 + 10) \\&= 4 - 14e^{-6t} + 10e^{-7t}.\end{aligned}$$

• **Questão 2** (2.5 pontos) Considere a função

$$f(t) = 2tu(t) + (at + b)u(t - 2) + ((a + 4)t + b - 10)u(t - 4).$$

Sabendo que $f(t)$ é uma função contínua para todo t , responda os itens abaixo.

- (0.5 ponto) Calcule os valores de a e b .
- (1.0 ponto) Calcule $f'(t)$ e $f''(t)$ e esboce os gráficos de $f(t)$, $f'(t)$ e $f''(t)$.
- (1.0 ponto) Calcule $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $G(s) = \mathcal{L}\{f'(t)\}$ e $H(s) = \mathcal{L}\{f''(t)\}$.

Solução:

a) Começamos escrevendo $f(t)$ como uma função por partes:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2t, & 0 < t < 2 \\ (a + 2)t + b, & 2 < t < 4 \\ (2a + 6)t + 2b - 10, & t > 4 \end{cases}$$

Agora, observe que a função deve ser contínua em $t = 2$ e $t = 4$. Ou seja,

$$f(t) = \begin{cases} 2(a + 2) + b = 4 \\ (2a + 6)4 + 2b - 10 = 4(a + 2) + b \end{cases}$$

Assim,

$$f(t) = \begin{cases} 2a + b = 0 \\ 4a + b = -6 \end{cases}$$

A solução do sistema fornece $a = -3$ e $b = 6$.

b) Como

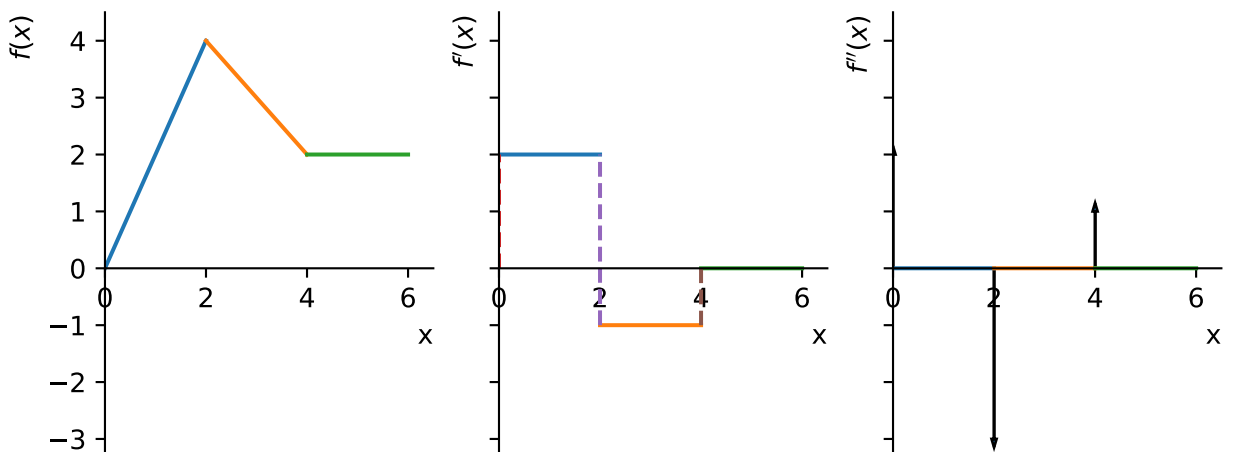
$$f(t) = 2tu(t) - 3(t - 2)u(t - 2) + (t - 4)u(t - 4),$$

temos

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2t\delta(t) + 2u(t) - 3(t - 2)\delta(t - 2) - 3u(t - 2) + (t - 4)\delta(t - 4) + u(t - 4) \\ &= 2u(t) - 3u(t - 2) + u(t - 4). \end{aligned}$$

e

$$f''(t) = 2\delta(t) - 3\delta(t - 2) + \delta(t - 4).$$



c) Pela propriedade do deslocamento no eixo t , temos:

$$F(s) = \frac{2 - 2e^{-2s} + e^{-4s}}{s^2},$$

$$G(s) = \frac{2 - 3e^{-2s} + e^{-4s}}{s}$$

e

$$G(s) = 2 - 3e^{-2s} + e^{-4s}.$$

• **Questão 3** (2.5 pontos) Um sistema mecânico com massa m , coeficiente de amortecimento c e constante de mola k é representado pela equação diferencial

$$2y''(t) + cy'(t) + 50y(t) = f(t)$$

e condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, onde $f(t)$ é uma força externa aplicada ao sistema. Considere que $f(t) = 1$.

- a) (0.5 ponto) Encontre o valor de c para que o sistema seja criticamente amortecido.
 b) (1.0) Encontre $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.
 c) (1.0) Encontre $y(t)$ para o caso específico dado.

Solução item a) Como $\Delta = c^2 - 400 = 0$, então $c = 20$, visto que $c > 0$.

Solução item b) Tomando a transformada de Laplace, temos:

$$2[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 20[sY(s) - y(0)] + 50Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Rearrajando os termos, temos:

$$(2s^2 + 20s + 50)Y(s) = 2 + \frac{1}{s}.$$

Isolando $Y(s)$, encontramos a forma geral:

$$Y(s) = \frac{2s + 1}{s(2s^2 + 20s + 50)}.$$

Solução item c) Separamos em frações parciais da forma

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s + 1}{s(2s^2 + 20s + 50)} \\ &= \frac{s + 1/2}{s(s^2 + 10s + 25)} \\ &= \frac{s + 1/2}{s(s + 5)^2} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 5} + \frac{C}{(s + 5)^2} \\ &= \frac{A(s + 5)^2 + Bs(s + 5) + Cs}{s(s + 5)^2} \\ &= \frac{(A + B)s^2 + (10A + 5B + C)s + 25A}{s(s + 5)^2}. \end{aligned}$$

e encontramos um sistema da forma

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 10A + 5B + C = 1 \\ 25A = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, $A = \frac{1}{50}$, $B = -\frac{1}{50}$ e $C = \frac{9}{10}$.

Assim, aplicando os itens 7 e 8 da tabela na expressão

$$Y(s) = \frac{1}{50s} - \frac{1}{50(s + 5)} + \frac{9}{10(s + 5)^2}$$

temos a solução

$$y(t) = \frac{1}{50} - \frac{e^{-5t}}{50} + \frac{9te^{-5t}}{10}.$$

• **Questão 4** (2.0 pontos) Use a tabela de transformadas de Laplace e as propriedades fornecidas para calcular a transformada inversa de Laplace das funções abaixo.

a) (0.5 ponto) $F(s) = \frac{4se^{-s}}{(s^2 + 4)^2}$.

b) (0.75 ponto) $G(s) = \frac{4(s-1)e^{-s}}{((s-1)^2 + 4)^2}$.

c) (0.75 ponto) $H(s) = \frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}$.

Solução:

a) Pelo item 22 da tabela, temos

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4s}{(s^2 + 4)^2} \right\} = t \operatorname{sen}(2t).$$

Usando a propriedade da translação no eixo t , obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4se^{-s}}{(s^2 + 4)^2} \right\} = (t-1) \operatorname{sen}(2(t-1))u(t-1).$$

b) Sabendo que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4s}{(s^2 + 4)^2} \right\} = t \operatorname{sen}(2t),$$

podemos usar a propriedade da translação no eixo s para obter

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4(s-1)}{((s-1)^2 + 4)^2} \right\} = te^t \operatorname{sen}(2t),$$

Agora, a propriedade da translação no eixo t nos dá

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4(s-1)e^{-s}}{((s-1)^2 + 4)^2} \right\} = (t-1)e^{t-1} \operatorname{sen}(2(t-1))u(t-1).$$

c) Escrevemos

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})} = \frac{1}{s+1} (1 + e^{-s} + e^{-2s} + \dots).$$

Usando o item 7 da tabela e a propriedade da translação no eixo t , temos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})} \right\} = e^{-t} + u(t-1)e^{-(t-1)} + u(t-2)e^{-(t-2)} + u(t-3)e^{-(t-3)} + \dots.$$