Primeira avaliação - MAT01168 - MATEMÁTICA APLICADA II - Turma A

Nome: Cartao:

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Ao usar sistemas de coordenadas curvilíneas (cilíndricas, esféricas etc), indique a correspondência para o sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z).
- Trabalhe individualmente a sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.
- Não é permitido o uso de calculadoras.

Formulário:

1. $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
2. $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
3. $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$
4. $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$
5. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
6. $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$
7. $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} a^{n-j} b^j$, $\binom{j}{k} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$

Questão 1 (2.5) Um partícula carregada entra em um ambiente onde há um campo magnético constante e sob a ação desta força passa a descrever a seguinte trajetória:

$$\vec{r}(t) = a\cos wt\vec{i} + a\sin wt\vec{j} + cwt\vec{k}, t \geq 0$$

onde a e c são constantes positivas e w é a velocidade angular da partícula (uma constante positiva).

a) (1.5) Calcule a velocidade ($\vec{v}$), a aceleração ($\vec{a}$) e suas componentes normal e tangencial.

b) (1.0) Use o resultado anterior para obter os vetores unitários $\vec{T}$ e $\vec{N}$.

Solução item a

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = -aw\sin(wt)\vec{i} + aw\cos(wt)\vec{j} + cw\vec{k} \\ \vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = -aw^2\cos(wt)\vec{i} - aw^2\sin(wt)\vec{j}\end{aligned}$$

$$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{a^2w^3\sin(wt)\cos(wt) - a^2w^3\cos(wt)\sin(wt)}{v} = 0$$

Como $a_T = 0$, temos que $\vec{a} = a_N\vec{N}$ e do fato que $a_N \geq 0$, sabemos que

$$a_N = \|\vec{a}\| = \left(a^2w^4\cos^2(wt) + a^2w^4\sin^2(t)\right)^{1/2} = aw^2$$

Solução item b Como $\vec{a} = a_N\vec{N}$, temos

$$\vec{N} = \frac{\vec{a}}{a_N} = \frac{-aw^2\cos(wt)\vec{i} - aw^2\sin(wt)\vec{j}}{aw^2} = -\cos(wt)\vec{i} - \sin(wt)\vec{j}$$

Da definição de $\vec{T}$, temos:

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{-aw\sin(wt)\vec{i} + aw\cos(wt)\vec{j} + cw\vec{k}}{\sqrt{a^2w^2 + c^2w^2}} = \frac{-a\sin(wt)\vec{i} + a\cos(wt)\vec{j} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Questão 2 (2.0) Um corpo de massa m se move sob a ação exclusiva de uma força central $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, onde $r = \|\vec{r}\|$ e $f(r)$ é uma função diferenciável associada a um potencial central $V(r)$.

a) (1.0) Mostre que o momento angular $\vec{L}$ do corpo dado por

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

é preservado.

b) (1.0) Calcule o potencial $V(r)$ quando $\vec{F} = -e^{-\lambda r}\hat{r}$

Solução item a A fim de mostrar que o momento angular é preservado, mostraremos que a derivada $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= m\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right) = m\left(\vec{r} \times \vec{a} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{\vec{0}}\right) = \vec{r} \times \vec{F} \\
&= \vec{r} \times (f(r)\vec{r}) = f(r)(\vec{r} \times \vec{r}) = \vec{0}
\end{aligned}$$

Solução item b Como $\vec{\nabla}V(r) = \frac{dV(r)}{dr}\hat{r} = -e^{-\lambda r}\hat{r}$, temos $\frac{dV(r)}{dr} = -e^{-\lambda r}$, o que implica

$$V(r) = -\int e^{-\lambda r} dr = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda r} + C$$

Questão 3 (2.5) Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F} = xz\vec{i} + x^3\vec{j} + xyz\vec{k}$ ao deslocar uma partícula ao longo da circunferência de raio 1 centrada no ponto $(0,0,0)$ sobre o plano $z = 0$ orientada no sentido horário. Qual seria o valor do trabalho de o deslocamento acontecesse no sentido contrário?

Solução Usando o Teorema de Stokes, temos:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{N} dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot (-\vec{k}) \rho d\phi d\rho$$

onde usamos o sistema de coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\phi \\ y &= \rho \sin\phi. \end{aligned}$$

Agora, precisamos calcular $\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x^3 & xyz \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = 3x^2 = 3\rho^2 \cos^2\phi$$

E finalmente, temos:

$$\begin{aligned} W &= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho^3 \cos^2\phi d\phi d\rho = -3 \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi \right) \\ &= -3 \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\phi)) \, d\phi \right) = -\frac{3}{8} (2\pi) = -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Onde foi usada a seguinte identidade trigonométrica:

$$\cos^2\phi = \left(\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\phi} + 2 + e^{-2i\phi}}{4} = \frac{1 + \cos(2\phi)}{2}$$

Se o deslocamento acontecesse no sentido contrário, o trabalho seria $\frac{3\pi}{4}$.

Questão 4 (3.0) Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = (1+z^2)\vec{k}$ e a superfície S limitada superiormente pela esfera centrada na origem de raio 1 e inferiormente pelo plano $z = 0$.

a) (1.50) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para fora através de um parametrização direta da superfície, isto é, usando a definição de fluxo e sem usar o Teorema da Divergência.

b) (1.50) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para fora através do teorema da divergência.

Solução item a
Fluxo através do hemisfério:
$G(x, y, z) = z - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$\vec{\nabla}G(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\vec{j} + \vec{k}$$

Usamos coordenada cilíndricas com

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos(\phi) \\ y &= \rho\sin(\phi). \end{aligned}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\nabla}G(x,y,z) = 1 + z^2$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}ds = \iint_A \vec{F}\cdot\vec{\nabla}G dA = \int_0^1\int_0^{2\pi}(1+z^2)\rho d\phi d\rho \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}(2-x^2-y^2)\rho d\phi d\rho \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}(2-\rho^2)\rho d\phi d\rho = 2\pi\int_0^1(2\rho-\rho^3)d\rho \\ &= 2\pi\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

Fluxo através da base:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}ds = -\int_0^1\int_0^{2\pi}(1+z^2)\rho d\phi d\rho \\ &= -\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho d\phi d\rho = -\pi \end{aligned}$$

Portanto $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\pi}{2}$.
Solução do item b
Usamos coordenada esféricas com

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 2z = 2r\cos(\theta)$$

Pelo teorema da divergência, temos:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 2zr^2\sin\theta d\theta d\phi dr \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 2r\cos\theta r^2\sin\theta d\theta d\phi dr \\ &= 2\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} r^3\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi dr \\ &= 2(2\pi)(1/4)\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= \pi\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin(2\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{-\cos(2\theta)}{2}\right)_0^{\pi/2} = \pi/2 \end{aligned}$$