GABARITO - Turma B

MATEMÁTICA APLICADA II - UFRGS

1ª PROVA DE MAT 01168 - ANÁLISE VETORIAL. DATA: 16/09/2011

NOME : CARTÃO:

TURMA: CURSO:

A Matemática é uma linguagem e como tal tem sua notação simbólica . Use a notação combinada, fazendo a distinção entre funções escalares e funções vetoriais. Atente para possíveis incoerências na notação. Não se esqueça que esta é uma prova de Análise Vetorial.

 # Em cada uma das questões, deixe claro todas as etapas de seu raciocínio, enumerando as fórmulas (TAB n°) e propriedades que usar, conforme se fez em aula

 # Procure os atalhos (caminhos mais simples).

 # Não serão consideradas expressões soltas, sem vínculos matemáticos. O sinal de igual (=) é o verbo da afirmação matemática.

Profª Irene Strauch

1ª Questão : a)1.5; b) 1.5

No estudo do movimento de uma partícula no espaço é, muitas vezes, desejável escrever a aceleração $\vec{a}$ em termos de suas componentes tangencial e normal , isto é : $\vec{a}(t) = a_T(t)\vec{T} + a_N(t)\vec{N}$ (1)

a) Mostre, a partir desta expressão, que $a_T(t) = \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{a}}{|\vec{v}|}$ e $a_N(t) = \dfrac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|}$, justificando todas as etapas de sua demonstração.

– Multiplicando escalarmente a expressão (1) por $\vec{v}$, temos:

$\vec{v}\cdot\vec{a} = a_T\,\vec{v}\cdot\vec{T} + a_N\,\vec{v}\cdot\vec{N}$; $\vec{v}\cdot\vec{T} = v\vec{T}\cdot\vec{T} = v$

$\vec{v}\cdot\vec{N} = v\vec{T}\cdot\vec{N} = 0$, pois $\vec{T} \perp \vec{N}$

Logo $\vec{v}\cdot\vec{a} = a_T v \;\therefore\; a_T = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}$

– Multiplicando vetorialmente a expressão (1) por $\vec{v}$, temos:

$\vec{v}\times\vec{a} = a_T\,\vec{v}\times\vec{T} + a_N\,\vec{v}\times\vec{N}$, $\vec{v}\times\vec{T} = 0$, pois $\vec{v} = v\vec{T}$

$\vec{v}\times\vec{N} = v\vec{T}\times\vec{N} = v\vec{B}$

Logo $\vec{v}\times\vec{a} = a_N v\vec{B}$

Tomando o módulo de ambos os lados e lembrando $|\vec{B}| = 1$, obtemos

$$a_N = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{v}.$$

b)Supondo que a trajetória da partícula é dada, no SI, por :

$$\vec{r}(t) = 2\cos\omega t\,\vec{i} + 2sen\omega t\,\vec{j} + \omega t\,\vec{k},$$

onde ω é a velocidade angular constante.

Calcule as componentes $a_T(t)$ e $a_N(t)$. Expresse o vetor aceleração como $\vec{a}(t) = a_T(t)\vec{T} + a_N(t)\vec{N}$ e compare com o vetor aceleração calculado no referencial cartesiano, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Comente estes resultados.

C: $\vec{r}(t) = 2\cos wt\,\vec{i} + 2\operatorname{sen} wt\,\vec{j} + wt\,\vec{k} \rightarrow$ hélice circular

$\vec{v} = \vec{r}\,'(t) = -2w\operatorname{sen}wt\,\vec{i} + 2w\cos wt\,\vec{j} + w\vec{k}$

$|\vec{v}| = \sqrt{4w^2\operatorname{sen}^2wt + 4w^2\cos^2wt + w^2} = \sqrt{4w^2\underbrace{(\cos^2wt + \operatorname{sen}^2wt)}_{1} + w^2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{5w^2} = \sqrt{5}\,w$

$\vec{a} = \vec{r}\,''(t) = -2w^2\cos wt\,\vec{i} - 2w^2\operatorname{sen}wt\,\vec{j}$

$\vec{v}\cdot\vec{a} = 4w^3\operatorname{sen}wt\cancel{\cos wt} - 4w^3\cancel{\operatorname{sen}wt}\cos wt = 0 \;\therefore\; a_T = 0$

$$\vec{v}\times\vec{a} = (w)(-2w^2)\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\operatorname{sen}wt & 2\cos wt & 1 \\ \cos wt & \operatorname{sen}wt & 0 \end{vmatrix} = -2w^3\Big[-\operatorname{sen}wt\,\vec{i} + \cos wt\,\vec{j} - 2\underbrace{(\operatorname{sen}^2wt + \cos^2wt)}_{1}\vec{k}\Big]$$

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = 2\omega^3 \sqrt{\underbrace{\operatorname{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t}_{1} + 4} = 2\sqrt{5}\,\omega^3$$

$$a_N = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v} = \frac{2\sqrt{5}\,\omega^3}{\sqrt{5}\,\omega} = 2\omega^2 \,//$$

Logo $\vec{a} = 2\omega^2 \vec{N}$ no referencial $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$

e $\vec{a} = \vec{r}\,''(t) = -2\omega^2(\cos\omega t\,\vec{i} + \operatorname{sen}\omega t\,\vec{j})$ no referencial $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Comentários:

No referencial $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ podemos afirmar numa trajetória helicoidal circular o vetor $\vec{a}$ aponta sempre na direção da normal $\vec{N}$ e que a componente tangencial é sempre zero.

Já no referencial $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, é preciso acoplar o referencial inercial à partícula, para se ter a idéia de como localizar a direção do vetor $\vec{a}$.

Observar que ambos referenciais medem a mesma aceleração $\vec{a}$, cujo módulo é $|\vec{a}| = 2\omega^2$.

Por comparação também se conclui que $\vec{N} = -\cos\omega t\,\vec{i} - \operatorname{sen}\omega t\,\vec{j}$.

2ª Questão : a)0.5; b)1.0 .

Um corpo é atraído para a origem de um sistema de coordenadas retangulares 3D por um campo de forças dado por $\vec{F} = f(r)\vec{r}$, onde r é o módulo do vetor posição $\vec{r}$.

a) Mostre que

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{F} = 3f(r) + rf'(r)$$

$$\nabla . \vec{F} = \nabla . \left(f(r) \vec{r} \right) \overset{TAB(5)}{=} \underbrace{\nabla f(r)}_{\text{grad. de campo central}} . \vec{r} + f(r) \nabla . \vec{r}$$

Sabemos que $\nabla f(r) = f'(r)\hat{r}$ e

$$\nabla . \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Logo $\nabla . \vec{F} = f'(r)\hat{r}.\vec{r} + 3f(r)$, como $\hat{r}.\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r}.\vec{r} = r$

temos $\nabla . \vec{F} = r f'(r) + 3f(r)$ c.q.d

b) A seguir, calcule $\vec{\nabla} \bullet \vec{F}$ para $\vec{F} = \frac{k}{r^3}\vec{r}$ e interprete o seu resultado.

$$\nabla . \vec{F} = \nabla . \frac{k}{r^3}\vec{r} = k \nabla . \frac{1}{r^3}\vec{r} \quad \therefore \quad f(r) = r^{-3}, \quad f'(r) = -3r^{-4}$$

Usando o resultado do ítem a), temos:

$$\nabla . \vec{F} = k \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4} r \right] = 3k \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right)$$

Este resultado só será zero se $r \neq 0$.

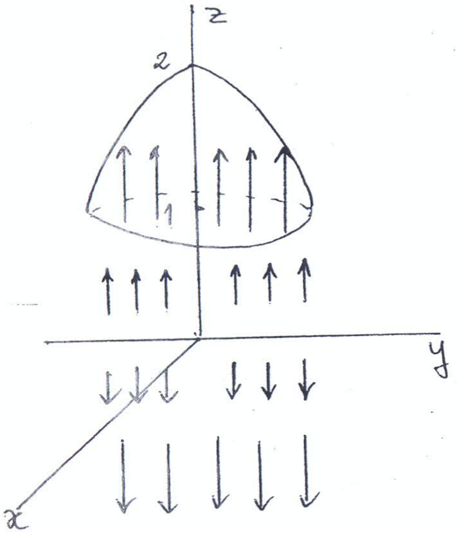
Portanto $\nabla . \vec{F} = 0$, $r \neq 0$ significa que não há fonte nem sumidouros em todo espaço exceto na origem.

Como este é um campo 'lei inverso do quadrado', então na origem há fontes, cargas p/ lei de Coulomb e massa para lei da Gravitação Universal.

3ª Questão: a)1.0 ; b)1.5

Dada a superfície S, orientada para fora e representada por $z = 2 - x^2 - y^2$ e limitada pelo plano $z = 1$.

a) Identifique S, diga se é aberta ou fechada, faça um esboço gráfico de S e diga qual a simetria desta superfície.
Represente, também neste gráfico, alguns vetores representativos do campo vetorial $\vec{F} = z\vec{k}$.



S é um parabolóide circular, de vértice em $z = 2$ e base em $z = 1$. Logo S é uma superfície fechada.
A simetria de S é analisada pela sua representação $z = 2-(x^2+y^2) =$

$$z = 2-\rho^2$$
$\downarrow$
coord. cilíndrica

Logo: simetria cilíndrica

b) Escolha a maneira mais simples para calcular o fluxo Φ do campo $\vec{F} = z\,\vec{k}$ através de S.

Como a superfície é fechada, a maneira mais simples para calcular o fluxo é usar o teorema da Divergência de Gauss, isto é: $\Phi = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\, dV$ onde

$\nabla\cdot\vec{F} = \dfrac{\partial z}{\partial z} = 1$ e $dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$, onde $1 \le z \le 2-\rho^2$, $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=0}^{1} \left[\int_{z=1}^{2-\rho^2} dz\right] \rho\, d\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^{1} \rho\left[(2-\rho^2)-1\right] d\rho =$$

$$= 2\pi \int_{\rho=0}^{1} (\rho-\rho^3)\, d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right] = 2\pi\,\frac{1}{4} = \pi/2$$

Outra opção p/ os limites de integração: $0 \le \rho \le \sqrt{2-z}$ e $1 \le z \le 2$

$$\Phi = 2\pi \int_{z=1}^{2} \left[\int_0^{\sqrt{2-z}} \rho\, d\rho\right] dz = \frac{2\pi}{2} \int_1^2 (2-z)\, dz = \pi\left(2z-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}$$

4ª Questão : a)1.0; b)1.0; c)1.0 ponto.

Um fluido incompressível em movimento em regime estacionário, é descrito pelo seguinte campo de velocidades :

$$\vec{v} = (x-y)\vec{i} + (x+z)\vec{j} - (x+y)\vec{k}$$

a) Faça os testes e responda : este fluído é irrotacional? Está livre de fontes e sumidouros?

1º teste $\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-y & x+z & -(x+y) \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \neq 0$, logo o fluido é rotacional ou de vórtice.

2º teste $\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x+z) + \frac{\partial}{\partial z}(-x-y) = 1 > 0$ há predomínio de fontes.

b) Calcule a circulação deste campo ao longo da curva $\vec{r}(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 3 sen t\,\vec{j}$, para $0 \le t \le 2\pi$.

circ $\vec{v} \overset{def}{=} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$, $\vec{v} \cdot d\vec{r} = (x-y)dx + (x+z)dy - (x+y)dz$

C: $x = 3\cos t$ ∴ $dx = -3 sen t\, dt$
$y = 3 sen t$ ∴ $dy = 3\cos t\, dt$
$z = 0$ $dz = 0$

$\Longrightarrow \vec{v} \cdot d\vec{r} = -9(\cos t - sen t) sen t\, dt + 9\cos^2 t\, dt$

$\vec{v} \cdot d\vec{r} = (9 sen^2 t + 9\cos^2 t - 9 sen t \cos t)\, dt$

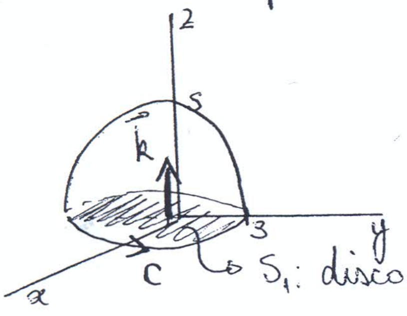
$\vec{v} \cdot d\vec{r} = \left(9 - \frac{9}{2} sen 2t\right) dt$

$$\text{circ } \vec{v} = \int_0^{2\pi} 9\, dt - \cancel{\int_0^{2\pi} \frac{9}{2} sen 2t\, dt}^{\,0} = 18\pi$$

c) Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{v}$ através da superfície S aberta $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, orientada positivamente.

$$\Phi \overset{def}{=} \iint_S \nabla \times \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS$$

Como a superfície é aberta, podemos usar o atalho do Teorema de Stokes, e substituir a superfície S (um hemisfério) pela superf. mais simples limitada pela curva-limite de S, cuja normal é $\vec{k}$.



S_1: disco de raio 3

$$\Phi = \iint_{S_1} (-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) \cdot \vec{k}\, dS_1 =$$

$= 2\iint_{S_1} dS_1 =$ área do disco de raio 3

$= 18\pi$ (Verifica-se o Teor. de Stokes: Rta a) = b))