Primeira avaliação - MAT01168 - MATEMÁTICA APLICADA II - Turma C

Nome: Cartao:

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Ao usar sistemas de coordenadas curvilíneas (cilíndricas, esféricas etc), indique a correspondência para o sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z).
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.
- Não é permitido o uso de calculadoras.

Formulário:

1. $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
2. $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
3. $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$
4. $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$
5. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
6. $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$
7. $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} a^{n-j} b^j$, $\binom{j}{k} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$

Questão 1 (2.5) Um automóvel se desloca sobre uma pista horizontal em forma de elipse, cujo raio de curvatura varia entre $100m$ e $800m$.

a) (1.5) Parametrize uma elipse em coordenadas cartesianas no plano xy e, a partir dessa parametrização, calcule o comprimento de cada um dos semi-eixos.

b) (1.0) Calcule a velocidade escalar máxima com que o automóvel pode percorrer a pista sem que sua aceleração normal supere $4m/s^2$.

Solução item a
Consideramos a seguinte parametrização:

$$\begin{aligned} x &= a\cos(t) \\ y &= b\sin(t) \end{aligned}$$

onde $0 \leq a \leq b$ são positivos e indicam os semi-eixos da elipse e $0 \leq t \leq 2\pi$. A fim de obter o raio de curvatura, calculamos a curvatura através da fórmula

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição dado por

$$\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + b\sin(t)\vec{j}$$

as derivadas de $\vec{r}(t)$ são, portanto, dadas por:

$$r'(t) = -a\sin(t)\vec{i} + b\cos(t)\vec{j}$$

$$r''(t) = -a\cos(t)\vec{i} - b\sin(t)\vec{j}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \left(-a\sin(t)\vec{i} + b\cos(t)\vec{j}\right) \times \left(-a\cos(t)\vec{i} - b\sin(t)\vec{j}\right) \\ &= ab\sin^2(t)\vec{k} + ab\cos^2(t)\vec{k} = ab\vec{k} \end{aligned}$$

Onde usamos a identidade trigonométrica $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ e as identidades vetoriais $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ e $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$.
Agora calculamos $\|\vec{r}(t)\|$:

$$\|\vec{r}(t)\| = \left[a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)\right]^{1/2}$$

Desta forma, temos:

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{ab}{\left[a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)\right]^{3/2}}$$

Como a curvatura assume os valores máximos e mínimos nos vértices, basta olhar o valor de κ em $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2}$, portanto, κ está no intervalo

$$\frac{a}{b^2} \leq \kappa \leq \frac{b}{a^2}$$

Como $\rho = \frac{1}{\kappa}$, temos

$$\frac{a^2}{b} \leq \rho \leq \frac{b^2}{a}$$

e, portanto, $\frac{a^2}{b} = 100$ e $\frac{b^2}{a} = 800$. Para resolver o sistema, substituimos $b = \frac{a^2}{100}$ na segunda expressão e encontramos:

$$\frac{a^4}{10000a} = 800 \Longrightarrow a^3 = 8 \cdot 10^6 \Longrightarrow a = 2 \cdot 10^2 = 200$$

e

$$b = \frac{a^2}{100} = \frac{40000}{100} = 400$$

Portanto os semi-eixos da elipse são $200m$ e $400m$.

Solução item b Sabemos que $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, pelo que a aceleração normal é máxima quando o raio de curvatura é mínimo, ou seja, $100m$, daí temos:

$$v = \sqrt{a_n\rho} = \sqrt{4 \cdot 100} = 20m/s$$

Questão 2 (2.5) Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = f(r)\vec{r}$, onde $r = \|\vec{r}\|$ e $f(r)$ é uma função diferenciável.

a) (1.5) Calcule o rotacional e o divergente de $\vec{F}$.

b) (1.0) Para $f(r) = \cosh(r)$, calcule a circulação de $\vec{F}$ ao realizar uma volta ao longo da curva descrita pela equação

$$x^2 + y^2 = 9$$

orientada no sentido horário.

Solução item a

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (f(r)\vec{r}) &\overset{TAB(6)}{=} \left(\vec{\nabla} f(r)\right) \times \vec{r} + f(r)\left(\vec{\nabla} \times \vec{r}\right) \\ &= (f'(r)\hat{r}) \times \vec{r} + f(r)(\vec{0}) = \vec{0}\end{aligned}$$

Onde usou-se a identidade $\vec{\nabla} f(r) = f'(r)\hat{r}$, o fato que $\vec{r} \times \hat{r} = \vec{0}$ (pois são paralelos) e

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (f(r)\vec{r}) &\overset{TAB(5)}{=} \left(\vec{\nabla} f(r)\right) \cdot \vec{r} + f(r)\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}\right) \\ &= (f'(r)\hat{r}) \cdot \vec{r} + f(r)(3) = rf'(r) + 3f(r)\end{aligned}$$

Onde mais uma vez usou-se a identidade $\vec{\nabla} f(r) = f'(r)\hat{r}$, o fato que $\vec{r} \cdot \hat{r} = \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{r^2}{r} = r$ e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Solução item b

A curva é uma circunferência de raio 3 e, logo, uma curva fechada. Como $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, $\vec{F}$ é conservativo e, portanto, a circulação é zero.

Questão 3 (2.0) Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F} = -\cos^2(x)y\vec{i} + (z^2 + y^2)\vec{j}$ ao longo do retângulo cujos vértices são $(0,0,0)$, $(\pi,0,0)$, $(\pi,2,0)$ e $(0,2,0)$ no sentido anti-horário.

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{N} dS = \int_0^\pi \int_0^2 (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dy dx$$

Agora, precisamos calcular $\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\cos^2(x)y & z^2 + y^2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \cos^2(x)$$

E finalmente, temos:

$$W = \int_0^\pi \int_0^2 \cos^2(x) dy dx = 2 \int_0^\pi \cos^2(x) dx = \int_0^\pi (1 + \cos(2\phi)) dx = \pi$$

Onde foi usada a seguinte identidade trigonométrica:

$$\cos^2 \phi = \left(\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\phi} + 2 + e^{-2i\phi}}{4} = \frac{1 + \cos(2\phi)}{2}$$

Questão 4 Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1+z)\vec{k}$ e a superfície S limitada inferiormente pelo plano $z = 1$ e superiormente pela superfície que satisfaz a equação

$$z = 2 - x^2 - y^2.$$

a) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para fora através de uma parametrização direta da superfície (sem usar o Teorema da Divergência).

b) (1.0) Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para fora através do Teorema da Divergência.

c) (0.5) Qual seria o valor do fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S orientada para dentro?

Solução do item a
Fluxo pelo parabolóide:

$$G(x,y,z) = z - 2 + x^2 + y^2$$
$$\vec{\nabla}G(x,y,z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{F}\cdot\vec{\nabla}G(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 1 + z$$

Usamos coordenada cilíndricas com

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos(\phi) \\ y &= \rho\sin(\phi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \iint_A \vec{F}\cdot\vec{\nabla}G dA \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}(2x^2+2y^2+1+z)\rho d\phi d\rho \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}(x^2+y^2+3)\rho d\phi d\rho \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}(\rho^2+3)\rho d\phi d\rho \\ &= 2\pi\int_0^1(\rho^3+3\rho)d\rho = 2\pi(1/4+3/2) = \frac{7}{2}\pi \end{aligned}$$

Fluxo pela base:

$$\Phi_2 = -\int_0^1\int_0^{2\pi} 2\rho d\phi d\rho = -2\pi$$

Portanto

$$\Phi = \frac{3}{2}\pi$$

Solução do item b

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 3$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_V 3dV = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_1^{2-x^2-y^2} 3\ dz\rho d\phi d\rho \\ &= 3\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-x^2-y^2)\rho d\phi d\rho \\ &= 3\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)\rho d\phi d\rho \\ &= 6\pi\int_0^1(2\rho-\rho^3)d\rho = 6\pi(1/2-1/4) = 3/2\pi \end{aligned}$$

Solução do item c A inversão da orientação da superfície, multiplicaria o valor do fluxo por -1, ou seja, o fluxo seria $-3/2\pi$