03

GABARITO — D

MATEMÁTICA APLICADA II - UFRGS

1ª PROVA DE MAT 01168 - ANÁLISE VETORIAL.

DATA: 16/09/2011

NOME:

CARTÃO:

TURMA:

CURSO:

A Matemática é uma linguagem e como tal tem sua notação simbólica . Use a notação combinada, fazendo a distinção entre funções escalares e funções vetoriais. Atente para possíveis incoerências na notação. Não se esqueça que esta é uma prova de Análise Vetorial.

Em cada uma das questões, deixe claro todas as etapas de seu raciocínio, enumerando as fórmulas (TAB nº) e propriedades que usar, conforme se fez em aula

Procure os atalhos (caminhos mais simples).

Não serão consideradas expressões soltas, sem vínculos matemáticos. O sinal de igual (=) é o verbo da afirmação matemática.

Profª Irene Strauch

1ª Questão : a)1.5 ; b)1.0.

A trajetória de uma partícula é dada na sua representação vetorial por:

$$\vec{r}(t) = R\omega t\,\vec{i} + R\,sen\,\omega t\,\vec{j}\ ,\ \text{sendo } 0 \le \omega t \le 2\pi\ .$$

(as unidades físicas são as do SI).

a)Use a fórmula mais prática para calcular a curvatura $\kappa(t)$ para esta trajetória . A seguir, calcule os valores da curvatura em $\omega t = \frac{\pi}{4}$ e $\omega t = \frac{\pi}{2}$ para $R = 1$.

$K(t) = \dfrac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3}$,

$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = R\omega\vec{i} + R\omega\cos\omega t\,\vec{j}$

$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = 0\vec{i} - R\omega^2 sen\,\omega t\,\vec{j}$

$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(R\omega)^2 + (R\omega)^2\cos^2\omega t} = v$

$v^3 = (R\omega)^3(1 + \cos^2\omega t)^{3/2}$

$|\vec{v} \times \vec{a}| = |-R^2\omega^3 sen\,\omega t|$

$K(t) = \dfrac{\cancel{R^2}\cancel{\omega^3}|sen\,\omega t|}{R^{\cancel{3}}\cancel{\omega^3}(1+\cos^2\omega t)^{3/2}}$, $\omega t = \frac{\pi}{4}$, $R = 1$, $K(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}/2}{\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^{3/2}}$

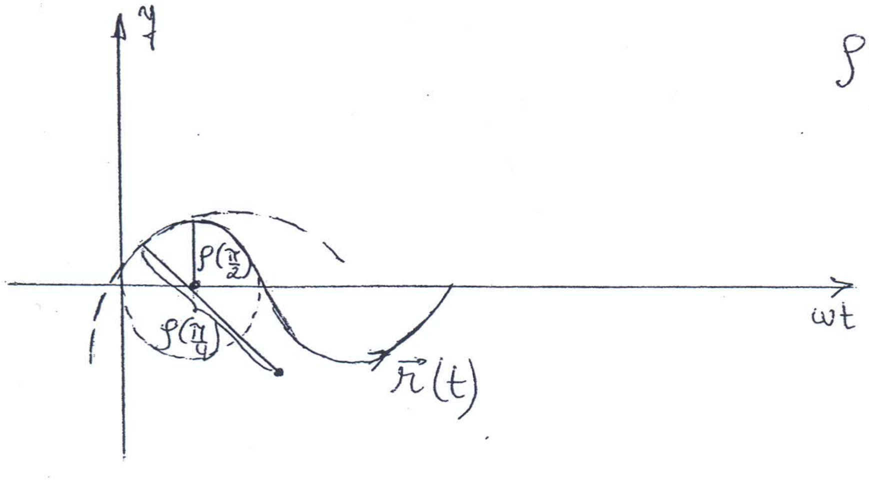
$K(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\dfrac{1}{(1+\frac{2}{4})^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\dfrac{1}{(\frac{3}{2})^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\,\dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$; $K(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{1} = 1$

b)Faça o gráfico desta curva no plano xy e projete os círculos de curvatura , com seus respectivos raios em $\omega t = \frac{\pi}{4}$ e $\omega t = \frac{\pi}{2}$.

$x = \omega t$, $y = sen\,\omega t$ $\therefore$ $y = sen\,x$ $\to$ a curva e' uma senóide

$0 \le \omega t \le 2\pi$, $\rho(t) = \dfrac{1}{K(t)}$, $\rho(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \simeq 2{,}6$, $\rho(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\rho(\frac{\pi}{4}) > \rho(\frac{\pi}{2})$



2ª Questão: (2.0 pontos)

Dado o campo escalar

$$\varphi = \left(x^2+y^2+z^2\right) e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} .$$

a) Represente φ como função de $r = |\vec{r}|$ e calcule $\vec{\nabla}\varphi(r)$ sem usar coordenadas retangulares.

$$\varphi(r) = r^2 e^{-r} , \qquad \nabla\varphi(r) = \varphi'(r)\,\hat{r}$$

$$\nabla\varphi(r) = \left[2r\,e^{-r} - r^2 e^{-r}\right]\hat{r} \quad \text{ou , lembrando que } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\nabla\varphi(r) = \left[2e^{-r} - r\,e^{-r}\right]\vec{r}$$

b) Mostre que este campo gradiente satisfaz a relação (TAB 8): $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi(r) = \vec{0}$.

$$\nabla\times\nabla\varphi(r) = \nabla\times\underbrace{\left(2e^{-r} - r e^{-r}\right)}_{f(r)}\underbrace{\vec{r}}_{\vec{F}} \overset{\text{TAB}(6)}{=} \nabla f(r)\times\vec{r} + f\underbrace{\nabla\times\vec{r}}_{0}$$

$$\nabla f(r) = f'(r)\,\hat{r} = \left(-2e^{-r} - e^{-r} + r e^{-r}\right)\hat{r}$$

$$\nabla f(r)\times\vec{r} = \left(-3e^{-r} + r e^{-r}\right)\underbrace{\hat{r}\times\vec{r}}_{0} \quad , \text{ pois } \hat{r} /\!/ \vec{r} .$$

c) Interprete fisicamente os resultados .

O campo $\vec{F} = \nabla\varphi(r)$ é um campo radial, conservativo e portanto irrotacional.

d) Supondo que $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$ representa um campo de forças, calcule o trabalho W para deslocar um corpo ao longo da reta que une os pontos $P_0(0,0,0)$ e $P_1(1,\sqrt{2},1)$.

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \nabla\varphi\cdot d\vec{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_0)$$

Em $P_0(0,0,0) \to r = 0$ e em $P_1(1,\sqrt{2},1) \to r = \sqrt{1+2+1} = 2$

Logo $W = r^2 e^{-r}\Big|_0^2 = 4e^{-2}$

4ª Questão : a)1.5 ; b) 0.5

A Lei de Ampère-Maxwell é dada na forma integral por

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0\, i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_{\vec{E}}}{\partial t}$$

a) Explique como se obtém, na Análise Vetorial, a forma diferencial desta lei .
Lembre-se que i é corrente elétrica e Φ_E é o fluxo do campo elétrico $\vec{E}$ através de uma superfície S aberta limitada pela curva C .

Na Análise Vetorial temos o teorema de Stokes : $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS$ (1)

Lembrando ainda que a corrente elétrica i, está relacionada com a densidade de corrente $\vec{J}$ através da integral

(2) $i = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS$, e que o fluxo Φ_E é dado por

(3) $\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS$.

Substituindo (1), (2) e (3) na Lei de Ampère-Maxwell temos:

$$\iint_S \nabla \times \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS$$

Devido à independência entre as variáveis espaciais e o tempo, podemos escrever o último termo como $\mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n}\, dS$

Como todos os termos envolvem integrais de fluxo, podemos igualar : $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

b) Olhando para a forma diferencial obtida acima , como você responde à seguinte pergunta:
-Na ausência de corrente elétrica, qual é a condição que o campo elétrico $\vec{E}$ deve satisfazer para gerar um campo magnético $\vec{B}$ com capacidade de giro ?

Se $i = 0$, então $\vec{J} = 0$, e a forma diferencial da Lei de Ampère-Maxwell se reduz a:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

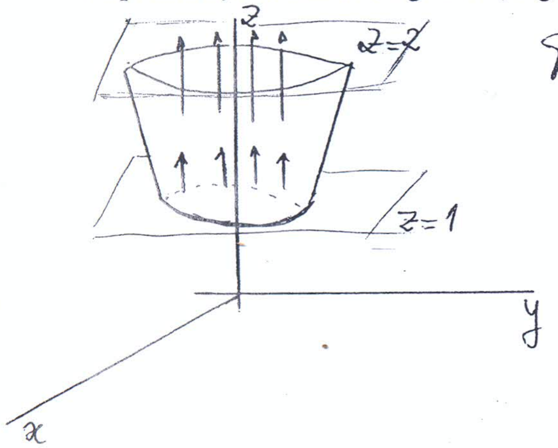
Logo, o campo $\vec{B}$ será um campo de vórtice, se o campo elétrico $\vec{E}$ variar com o tempo.

3ª Questão : a)1.0; b)1.5; c)0.5 .

Dada a superfície S , orientada para fora , e representada por $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e limitada pelos planos $z=1$ e $z=2$.

a) Identifique S, diga se é aberta ou fechada , faça um esboço gráfico de S e diga qual a simetria desta superfície.

Represente, também neste gráfico , alguns vetores representativos do campo vetorial $\vec{F} = z^2\,\vec{k}$.



Tronco de cone fechado, simetria cilíndrica pois a eq. do cone em coord. cilíndricas fica : $z=\rho$

b) Escolha a maneira mais simples para calcular o fluxo Φ do campo $\vec{F} = z^2\,\vec{k}$ através de S .

A maneira mais simples de calcular o fluxo através de uma superfície fechada é usar o Teorema da Divergência de Gauss. Isto é,

$\Phi = \iiint \nabla\cdot\vec{F}\,dV$, onde $\nabla\cdot\vec{F} = 2z$ e os limites de integração em coord. cilíndricas são:

$1\le z\le 2$, $0\le\rho\le z$ e $0\le\varphi\le 2$

$dV = \rho\,d\rho\,dz\,d\varphi$

$$\Phi = 2\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=1}^{2}\left[\int_{\rho=0}^{z}\rho\,d\rho\right] z\,dz = 4\pi\int_{z=1}^{2}\frac{z^2}{2}\,z\,dz = 2\pi\int_{1}^{2} z^3\,dz = \frac{2\pi}{4}\,z^4\Big|_{1}^{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[2^4-1\right] = 15\,\frac{\pi}{2}$$

c) Faça o teste para deduzir as regiões do espaço onde o campo $\vec{F} = z^2\,\vec{k}$ é um campo de fontes, um campo de sumidouros e onde não há fontes nem sumidouros.

$\nabla\cdot\vec{F} = 2z$, se $z>0$ — predomínio de fontes

se $z<0$ — predomínio de sumidouros

se $z=0$ — não há fontes nem sumidouros.