UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma B - 2012/1
Primeira avaliação - Grupo 1

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Ao usar sistemas de coordenadas curvilíneas (cilíndricas, esféricas etc), indique a correspondência para o sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z).
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.
- Não é permitido o uso de calculadoras.

Formulário:

1. $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
2. $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
3. $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$
4. $\operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$
5. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)$
6. $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$
7. $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} a^{n-j} b^j$, $\binom{j}{n} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$

• **Questão 1** (2.50 pontos): Considere a trajetória dada pelo vetor posição

$$\vec{r}(t) = 2^t \cos(2\pi t)\vec{i} + 2^t \operatorname{sen}(2\pi t)\vec{j}.$$

• **Item a** (1.25 ponto): Esboce o gráfico da trajetória para $0 \le t \le 2$, indicando no gráfico o trio de vetores de Frenet-Serret no instante $t = \frac{7}{4}$. Você deve indicar no gráfico o ponto inicial e final. (Obs: Não é necessário calcular algebricamente o vetor).

• **Item b** (1.25 ponto) Sabendo que em determinado instante o vetor tangente unitário é dado por $\vec{T} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$, encontre o versor que indica a direção e o sentido da aceleração normal neste mesmo instante.

• **Questão 2a** (1.5 pontos): Uma partícula de massa m se move sob a ação exclusiva de uma campo conservativo $\vec{F} = \vec{\nabla} V$. Mostre que a energia total dada por

$$E = \frac{m}{2} v(t)^2 - V(x(t), y(t), z(t))$$

é preservada. Dica: Use que $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ OU $\vec{v} \cdot \vec{a} = v a_T$.

• **Questão 2b** (1.0 pontos): Encontre um potencial V para o campo $\vec{F} = \operatorname{senh}(r)\hat{r}$.

- **Questão 3** (2.0 pontos): Considere o campo $\vec{F} = y\,\mathrm{sen}(z)\vec{j} + \cos(z)\vec{k}$ e superfície S dada por

$$S: \; z = 1 - x^2 - y^2$$

acima do plano $z = 0$ orientada para o lado **interno** da concavidade. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S. Dica: Aplique o Teorema da Divergência a uma superfície adequada.

• **Questão 4** (3.0 pontos): Considere o campo $\vec{F} = y^3\vec{i} + z\vec{k}$.

• **Item a** (1.5 pontos): Calcule o trabalho realizado por este campo ao deslocar uma partícula ao longo da circunferência de raio 3 centrada na origem sobre o plano xy orientada no sentido **anti-horário** usando o Teorema de Stokes.

• **Item b** (1.5 pontos): Calcule o trabalho realizado por este campo ao deslocar uma partícula ao longo da circunferência de raio 3 centrada na origem sobre o plano xy orientada no sentido **anti-horário** usando uma parametrização direta do caminho, ou seja, sem usar o Teorema de Stokes.