UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma B - 2012/1
Primeira avaliação - Grupo 1

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Ao usar sistemas de coordenadas curvilíneas (cilíndricas, esféricas etc), indique a correspondência para o sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z).
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.
- Não é permitido o uso de calculadoras.

Formulário:

1. $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
2. $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
3. $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$
4. $\operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$
5. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)$
6. $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$
7. $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} a^{n-j}b^j$, $\binom{j}{n} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$

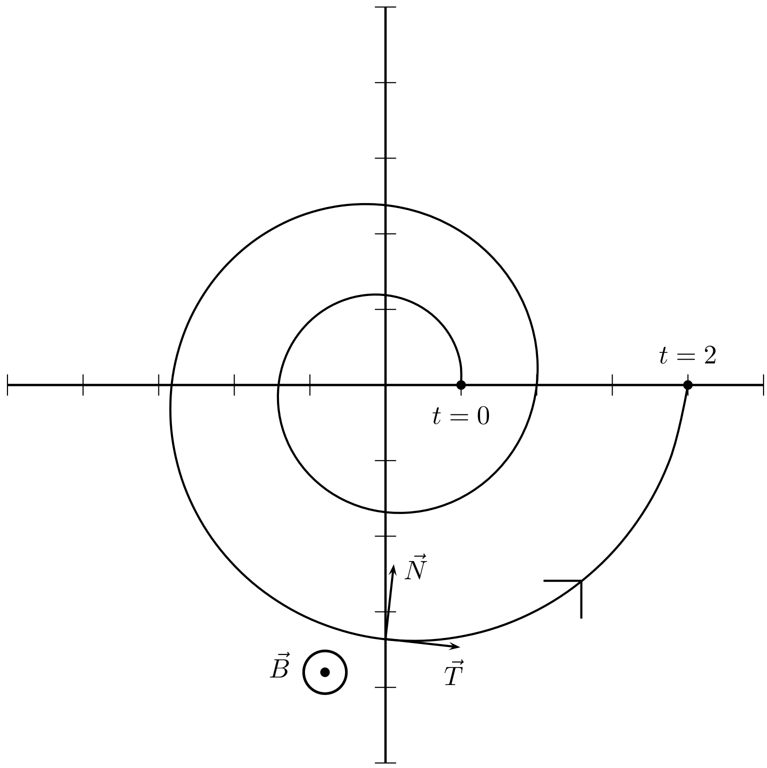
• **Questão 1** (2.50 pontos): Considere a trajetória dada pelo vetor posição

$$\vec{r}(t) = 2^t \cos(2\pi t)\vec{i} + 2^t \operatorname{sen}(2\pi t)\vec{j}.$$

• **Item a** (1.25 ponto): Esboce o gráfico da trajetória para $0 \leq t \leq 2$, indicando no gráfico o trio de vetores de Frenet-Serret no instante $t = \frac{7}{4}$. Você deve indicar no gráfico o ponto inicial e final. (Obs: Não é necessário calcular algebricamente o vetor).

• **Item b** (1.25 ponto) Sabendo que em determinado instante o vetor tangente unitário é dado por $\vec{T} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$, encontre o versor que indica a direção e o sentido da aceleração normal neste mesmo instante.

Solução item a:



No instante $t = 7/4$, a partícula está no ponto

$$\begin{aligned} x &= 2^{7/4}\cos\left(\frac{7}{2}\pi\right) = 2^{7/4}\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 \\ y &= 2^{7/4}\operatorname{sen}\left(\frac{7}{2}\pi\right) = 2^{7/4}\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -2^{7/4} \end{aligned}$$

Solução item b Como o trio de vetores $\vec{T} - \vec{N} - \vec{B}$ forma um conjunto ortonormal de vetores (ver questão 2 da lista adicional), temos:

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \vec{k} \times \left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}\right) = \frac{3}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{i}$$

Solução item b para quem não fez o problema da lista e não se deu conta da relação
Alternativamente, poder-se-ia resolver observando que $\vec{T} \cdot \vec{N}$ e $\|\vec{N}\| = 1$. Como o movimento acontece no plano xy, temos $\vec{N} = x\vec{i} + y\vec{j}$, logo

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1$$

Fazendo um esboço dos vetores e levando em consideração o sentido da trajetória, descobrimos que $x > 0$ e $y > 0$. Resolvendo a equação temos os mesmos valores.

Alternativamente, pode-se-ia proceder geometricamente esboçando os vetores e suas componentes.

• **Questão 2a** (1.5 pontos): Uma partícula de massa m se move sob a ação exclusiva de uma campo conservativo $\vec{F} = \vec{\nabla} V$. Mostre que a energia total dada por

$$E = \frac{m}{2} v(t)^2 - V(x, y, z)$$

é preservada. Dica: Use que $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ OU $\vec{v} \cdot \vec{a} = v a_T$.

• **Questão 2b** (1.0 pontos): Encontre um potencial V para o campo $\vec{F} = \cosh(r)\hat{r}$.

Solução item a Para mostrar que a energia se conserva, basta mostrar que a derivada temporal é nula. (Ver problema 3 da Lista 4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E &= m\vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} - \vec{\nabla} V \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = m\vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} - \vec{\nabla} V \cdot \vec{v}(t) \\ &= m\vec{v}(t) \cdot \vec{a} - \vec{F} \cdot \vec{v}(t) = 0 \end{aligned}$$

onde foi usado que $\vec{F} = m\vec{a}$.

Solução item b Como $\vec{F}$ é um campo com simetria radial, procuramos um potencial V com a mesma simetria, ou seja, $V = f(r)$. Como $\vec{\nabla} f(r) = f'(r)\hat{r}$, temos a identidade

$$f'(r)\hat{r} = \cosh(r)\hat{r}$$

Ou seja $f'(r) = \cosh(r)$, o que implica $f(r) = \int \cosh(r) dr = \operatorname{senh}(r) + C$ onde C é uma constante arbitrária.

• **Questão 3** (2.0 pontos): Considere o campo $\vec{F} = y\,\text{sen}(z)\vec{j} + \cos(z)\vec{k}$ e superfície S dada por

$$S: \; z = 1 - x^2 - y^2$$

acima do plano $x = 0$ orientada para o lado **interno** da concavidade. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S. Dica: Escolha um teorema de integração que facilite seus cálculos.

Solução

Primeiro observamos que S é uma superfície aberta, logo não podemos aplicar diretamente o Teorema da Divergência. No entanto, podemos fechar a superfície se considerarmos também a base B dada por

$$B : x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 0$$

Logo temos

$$\iint_{S \bigcup B} \vec{F} \cdot \vec{N} ds = -\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

O sinal negativo foi adicionado pois estamos considerando o vetor normal unitário $\vec{N}$ apontado para dentro. Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{sen}(z) - \text{sen}(z) = 0$, temos:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} ds + \iint_B \vec{F} \cdot \vec{k} ds = 0$$

Mas $\vec{F} \cdot \vec{k} = \cos(z) = 1$ em $z = 0$, portanto

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} ds = -\iint_B \vec{F} \cdot \vec{k} ds = -\iint_B ds = -\text{área de } B = -\pi$$

• **Questão 4** (3.0 pontos): Considere o campo $\vec{F} = y^3\vec{i} + z\vec{k}$.

• **Item a** (1.5 pontos): Calcule o trabalho realizado por este campo ao deslocar uma partícula ao longo da circunferência de raio 3 centrada na origem sobre o plano xy orientada no sentido **anti-horário** usando o Teorema de Stokes.

• **Item b** (1.5 pontos): Calcule o trabalho realizado por este campo ao deslocar uma partícula ao longo da circunferência de raio 3 centrada na origem sobre o plano xy orientada no sentido **anti-horário** usando uma parametrização direta do caminho, ou seja, sem usar o Teorema de Stokes.

solução item a Pelo Teorema de Stokes, temos

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} dS$$

Como $\vec{n} = \vec{k}$, temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot (\vec{k}) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -3y^2$$

Usamos o sistema de coordenadas polares

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos(\phi) \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}(\phi) \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} W &= \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = -\int_0^{2\pi} \int_0^3 (3y^2)\rho d\rho d\phi \\ &= -\int_0^{2\pi} \int_0^3 (3\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi)\rho d\rho d\phi = -3\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\,\phi d\phi \int_0^2 \rho^3 d\rho = -3\pi \cdot \frac{81}{4} = -\frac{243\pi}{4} \end{aligned}$$

onde foi usado

$$\mathrm{sen}^2(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^2 = -\frac{e^{2it} - 2 + e^{-2it}}{4} = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$$

e

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\phi)}{2} d\phi = \pi$$

Solução item b Usamos a parametrização

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= 3\cos(t)\vec{i} + 3\,\mathrm{sen}(t)\vec{j} \\ \vec{r}'(t) &= -3\,\mathrm{sen}(t)\vec{i} + 3\cos(t)\vec{j} \\ \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) &= -3\,\mathrm{sen}(t) y^3 = -81\,\mathrm{sen}^4(t) \end{aligned}$$

Assim

$$W = \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) dt = -81 \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^4(t) dt = -frac3434\pi$$

onde foi usado

$$\mathrm{sen}^4(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}}{16} = \frac{3 - 4\cos(2t) + \cos(t)}{8}$$

e

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^4(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{3 - 4\cos(2\phi) + \cos(\phi)}{8} d\phi = \frac{3\pi}{4}$$