UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2012/2
Primeira avaliação - Grupo 1

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Ao usar sistemas de coordenadas curvilíneas (cilíndricas, esféricas etc), indique a correspondência para o sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z).
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.
- Não é permitido o uso de calculadoras.

Formulário:

1. $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
2. $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
3. $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$
4. $\operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$
5. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)$
6. $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$
7. $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} a^{n-j} b^j$, $\binom{j}{n} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$

• **Questão 1** (3.0 pontos): Calcule o fluxo para fora do campo

$$\vec{F} = z\vec{k}$$

através da superfície que envolve a região limitada superiormente pelo cone

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2 - z$$

e inferiormente pelo plano $z = 0$.

• **Item a** (1.5) usando o Teorema da Divergência;

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV = \iiint_V dV = \frac{\pi\cdot 2^2\cdot 2}{3} = \frac{8}{3}\pi$$

Onde se usou que o volume do cone é dado pela área da base pela altura sobre 3.

• **Item b** (1.5) através da um integral sobre a superfície sem usar o Teorema da Divergência.

Escrevemos o fluxo Φ como constituído de duas partes: Φ_1 através da superfície cônica (com normal $\vec{n}\cdot\vec{k} > 0$) e Φ_2 atraves da base (com normal $\vec{n} = -\vec{k}$)

$$\Phi_1 = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \iint_A \vec{F}\cdot\vec{\nabla}GdA$$

onde A é a projeção do cone no plano xy e $G(x,y,z)$ é dada por

$$G(x,y,z) = z - 2 + \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\nabla}G = z\frac{\partial G}{\partial z} = z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$$

assim

$$\Phi_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2-\sqrt{x^2+y^2})\rho d\rho d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2-\rho)\rho d\rho d\phi = 2\pi\left(4-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}\pi$$

Já Φ_2 é nulo pois

$$\Phi_0 = \iint \vec{F}\cdot(-\vec{k})dA = \iint zdA = 0$$

pois a base está no plano $z = 0$.

Assim $\Phi = \Phi_1$

• **Questão 2** (2.0 pontos): A posição no instante t de uma abelha que se desloca em uma sala é dada pelo vetor $\vec{r}(t)$. A temperatura dentro da sala é descrita pelo campo escalar $T(x, y, z)$.

• **Item a** (1.0) Use a regra da cadeia para mostrar que a derivada no tempo da temperatura experimentada pela abelha é dada por

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade da abelha no instante t.

A temperatura no instante t é dada por $T(x(t), y(t), z(t))$, derivando em t e aplicando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{dt} T(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Basta observar que esta expressão é idêntica a $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T$:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

• **Item b** (1.0) Sabendo que $T(x, y, z) = 300 + 30x\cos(y)$ e que $\vec{r}(t) = \cos(\pi t)\vec{i} + \operatorname{sen}(2\pi t)\vec{k}$, use a fórmula do item a para obter a taxa de variação no tempo da temperatura experimentada pela abelha no instante $t = 1/2$.

$$\vec{\nabla} T = 30\cos(y)\vec{i} - 30x\operatorname{sen}(y)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = -\pi\operatorname{sen}(\pi t)\vec{i} + 2\pi\cos(2\pi t)\vec{k}$$

Assim

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = -30\pi\operatorname{sen}(\pi t)\cos(y)$$

sobre a trajetória $y = 0$, logo:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = -30\pi\operatorname{sen}(\pi t)$$

No ponto $t = 1/2$, temos:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = -30\pi$$

• **Questão 3** (2.5 pontos) Considere a parábola

$$z = ax^2.$$

Encontre uma expressão para a **curvatura** e a **torção** desta curva em função de x e a. Considere $a = 1$ e esboce em um único gráfico a parábola e o círculo de curvatura no vértice.

Parametrizamos a parábola como

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + at^2\vec{k}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \vec{i} + 2at\vec{k} \\ \vec{r}''(t) &= 2a\vec{k} \\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \left(\vec{i} + 2at\vec{k}\right) \times 2a\vec{k} = -2a\vec{j} \end{aligned}$$

onde usamos $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$ e $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$.

Da fórmula alternativa da curvatura, temos:

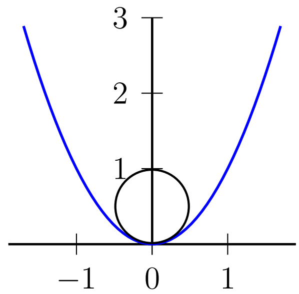
$$k(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{2|a|}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}}$$

logo

$$k(x) = \frac{2|a|}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}}$$

A torção é zero pois a curva é plana. A curvatura na origem vale $2|a|$ e o raio de curvatura vale, portanto:

$$\rho = \frac{1}{2|a|}$$



• **Questão 4** (2.5 pontos): Considere o campo dado por:

$$\vec{F} = (e^z y^2 + x)\vec{i}$$

e os seguintes caminhos:

C_1 : a reta que liga o ponto (2,0,0) até o ponto (-2,0,0).

$C_2 : x = 2\operatorname{sen}(t), \quad y = 2\cos(t), \quad z = 0, \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2.$

C_3 : o caminho fechado formado pela concatenação de C_1 e C_2.

Faça o que se pede:

• **Item a** (1.5) Calcule $\oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando o Teorema de Stokes. Do Teorema de Stokes, temos:

$$W = \oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Da orientação da curva, temos $\vec{n} = -\vec{k}$ e caculamos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -2ye^z = -2y$$

onde usamos $z = 0$ pois podemos fazer a integração sobre uma região plana totalmente contida no plano xy, um semicírculo.

Parametrizando em polares

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\operatorname{sen}\phi,$$

temos

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\pi \int_0^2 2y\rho d\rho d\phi = \int_0^\pi \int_0^2 2\rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi \\ &= \int_0^\pi \frac{16}{3} \operatorname{sen}\phi d\phi = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

• **Item b** (1.0) Calcule $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando uma parametrização direta. Parametrizamos a reta como

$$\vec{r} = -2t\vec{i}, -1 \leq t \leq 1$$

e temos

$$W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) dt$$

como $\vec{r}'(t) = -2$, $\vec{F} \cdot \vec{r}'(t) = -2(e^x y^2 + x) = -2x = 4t$, pois $y = z = 0$ no caminho.

Assim

$$W_1 = \int_{-1}^1 4t dt = 0$$