UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2014/1
Primeira avaliação - Grupo 1

1	2	3	4	Total

Nome: ____ **Cartão:** ______________

Regras a observar:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.
- Ao usar sistemas de coordenadas curvilíneas (cilíndricas, esféricas etc), indique a correspondência para o sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z).
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones, computadores ou qualquer outro recurso computacional.

Formulário:

1. $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
2. $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
3. $\cos(t) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$
4. $\operatorname{sen}(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$
5. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)$
6. $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$
7. $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$

• **Questão 1** (3.0 pontos): Considere a elipse sobre o plano xy cujos pontos satisfazem a equação dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

orientada no sentido horário. Aqui a e b são constantes positivas.

• **Item a** (0.75) Esboce o gráfico desta curva **orientada** para $a = 1$ e $b = 2$. Sem a necessidade de calculá-los algebricamente, desenhe os vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ no ponto do primeiro quadrante em que $y = x$.

• **Item b** (1.5) Através de uma parametrização adequada, encontre uma expressão para a curvatura em função das constantes a, b e das coordenadas x e y.

• **Item c** (0.75) Sabendo que o raio de curvatura em um vértices vale 8 e a distância deste vértice até a origem vale 2, calcule os comprimentos dos semieixos da elipse.

- **Questão 2** (2.0 pontos) Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \|\vec{r}\|$, prove as seguintes identidades:
  - **Item a** (1.0) $\vec{\nabla} f(r) = \dfrac{f'(r)}{r}\vec{r}, \quad r \neq 0$
  - **Item b** (1.0) $\nabla^2 f(r) = 2\dfrac{f'(r)}{r} + f''(r), \quad r \neq 0$

• **Questão 3** (2.0 pontos): Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo de força

$$\vec{F} = yx^2\cos(z)\vec{i} - z\vec{j} + \operatorname{sen}(xz)\vec{k}$$

ao deslocar uma partícula ao longo da circunferência de raio 1, centrada na origem sobre o plano xy. orientada no sentido horário.

• **Questão 4** (3.0 pontos): Calcule o fluxo do campo

$$\vec{F} = (2 + z^2)\vec{k}$$

atráves da fronteira da região limitada superiormente pela superfície

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - z$$

e inferiormente pelo plano $z = 0$ orientada para fora.

• **Item a** (1.5) Usando o Teorema da Divergência.

• **Item b** (1.5) Integrando o fluxo diretamente sobre a superfícies usando parametrizações adequadas e sem usar o Teorema da Divergência.