UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2014/1
Primeira avaliação - Grupo 1

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras a observar:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.
- Ao usar sistemas de coordenadas curvilíneas (cilíndricas, esféricas etc), indique a correspondência para o sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z).
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones, computadores ou qualquer outro recurso computacional.

Formulário:

1. $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
2. $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
3. $\cos(t) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$
4. $\operatorname{sen}(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$
5. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)$
6. $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$
7. $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \ \binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$

• **Questão 1** (3.0 pontos): Considere a elipse sobre o plano xy cujos pontos satisfazem a equação dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

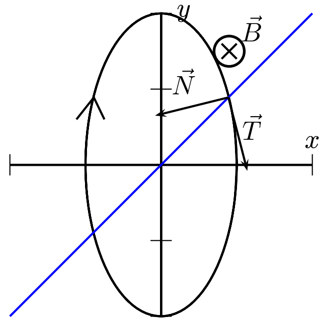
orientada no sentido horário. Aqui a e b são constantes positivas.

• **Item a** (0.75) Esboce o gráfico desta curva **orientada** para $a = 1$ e $b = 2$. Sem a necessidade de calculá-los algebricamente, desenhe os vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ no ponto do primeiro quadrante em que $y = x$.

• **Item b** (1.5) Através de uma parametrização adequada, encontre uma expressão para a curvatura em função das constantes a, b e das coordenadas x e y.

• **Item c** (0.75) Sabendo que o raio de curvatura em um vértices vale 8 e a distância deste vértice até a origem vale 2, calcule os comprimentos dos semieixos da elipse.

Resposta do item a



Resposta do item b Parametrizamos a curva conforme a seguir:

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos(t) \\ y(t) &= b\,\mathrm{sen}(t) \end{aligned}$$

onde a e b indicam os comprimentos dos semi-eixos da elipse e $0 \le t \le 2\pi$. A fim de obter o raio de curvatura, calculamos a curvatura através da fórmula

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição dado por

$$\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + b\,\mathrm{sen}(t)\vec{j}$$

as derivadas de $\vec{r}(t)$ são, portanto, dadas por:

$$r'(t) = -a\,\mathrm{sen}(t)\vec{i} + b\cos(t)\vec{j}$$

$$r''(t) = -a\cos(t)\vec{i} - b\,\mathrm{sen}(t)\vec{j}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \left(-a\,\mathrm{sen}(t)\vec{i} + b\cos(t)\vec{j}\right) \times \left(-a\cos(t)\vec{i} - b\,\mathrm{sen}(t)\vec{j}\right) \\ &= ab\,\mathrm{sen}^2(t)\vec{k} + ab\cos^2(t)\vec{k} = ab\vec{k} \end{aligned}$$

Onde usamos a identidade trigonométrica $\mathrm{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$ e as identidades vetoriais $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ e $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$. Agora calculamos $\|\vec{r}(t)\|$:

$$\|\vec{r}(t)\| = \left[a^2\,\mathrm{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)\right]^{1/2}$$

Desta forma, temos:

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{ab}{\left[a^2\,\mathrm{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)\right]^{3/2}}$$

Substituindo as variáveis originais, temos:

$$\kappa(t) = \frac{ab}{\left[\frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2\right]^{3/2}}$$

Resposta do item c Consideremos que estamos no vértice $(a, 0)$ com $a = 2$, pelo que temos

$$\kappa = \frac{a}{b^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{8}$$

temos $b^2 = 8a = 16$, o que implica $b = 4$.

• **Questão 2** (2.0 pontos) Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \|\vec{r}\|$, prove as seguintes identidades:

- **Item a** (1.0) $\vec{\nabla} f(r) = \frac{f'(r)}{r}\vec{r}, \quad r \neq 0$
- **Item b** (1.0) $\nabla^2 f(r) = 2\frac{f'(r)}{r} + f''(r), \quad r \neq 0$

Resposta do item a Primeiro observamos que f(r) é uma função de r e r é uma função de x, y e z e aplicamos a regra da cadeia:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} f(r) &= \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}f(r) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}f(r) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}f(r) \\
&= \vec{i}\ \frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j}\ \frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} + \vec{k}\ \frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} \\
&= \frac{df(r)}{dr}\left[\vec{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial r}{\partial z}\right]
\end{aligned}
$$

Agora calculamos as derivadas de r em relação às variáveis x, y e z:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} \\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{r} \\
\frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{r}
\end{aligned}
$$

Retornando à expressão anterior, obtemos:

$$
\frac{df(r)}{dr}\left[\vec{i}\frac{x}{r} + \vec{j}\frac{y}{r} + \vec{k}\frac{z}{r}\right] = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}
$$

Resposta do item b Primeiro aplicamos os itens 7 e 5 da tabe]a:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f(r) &= \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\right) \\
&= \vec{\nabla}\left(\frac{f'(r)}{r}\right)\cdot\vec{r} + \frac{f'(r)}{r}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\right)
\end{aligned}
$$

Agora usamos o resultado do item (a) para calcular o gradiente envolvido:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f(r) &= \frac{\left(\frac{f'(r)}{r}\right)'}{r}\vec{r}\cdot\vec{r} + 3\frac{f'(r)}{r} \\
&= \frac{\left(\frac{f'(r)}{r} - 2\frac{f''(r)}{r^2}\right)}{r}r^2 + 3\frac{f'(r)}{r} \\
&= \frac{(rf'(r) - 2f''(r))}{r} + 3\frac{f'(r)}{r} \\
&= 2\frac{f'(r)}{r} + f''(r)
\end{aligned}
$$

onde usamos:

$$
\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = \vec{\nabla}\cdot\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = 1 + 1 + 1 = 3
$$

• **Questão 3** (2.0 pontos): Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo de força

$$\vec{F} = yx^2\cos(z)\vec{i} - z\vec{j} + \mathrm{sen}(xz)\vec{k}$$

ao deslocar uma partícula ao longo da circunferência de raio 1, centrada na origem sobre o plano xy orientada no sentido horário.

Como a curva está sobre o plano xy, o vetor normal deve ser $\pm\vec{k}$, pela orientação da curva, vemos pela regra da mão direita que $\vec{n} = -\vec{k}$ Calculamos:

$$W = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{k}dA$$

$$\begin{aligned}\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\\ &= 0 - x^2\cos(z) = -x^2, \quad z = 0\end{aligned}$$

Parametrizamos em coordenadas polares:

$$x = \rho\cos(\phi), \quad y = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)$$

$$\begin{aligned}W &= -\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{k}dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 x^2\rho d\rho d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\cos^2\phi d\rho d\phi\\ &= \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\phi d\phi\right) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos(2\phi)}{2}\right)d\phi = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

• **Questão 4** (3.0 pontos): Calcule o fluxo do campo

$$\vec{F} = (2 + z^2)\vec{k}$$

atráves da fronteira da região limitada superiormente pela superfície

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - z$$

e inferiormente pelo plano $z = 0$ orientada para fora.

• **Item a** (1.5) Usando o Teorema da Divergência.

• **Item b** (1.5) Integrando o fluxo diretamente sobre a superfícies usando parametrizações adequadas e sem usar o Teorema da Divergência.

Resposta do item a Calculamos o divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2z$$

Pelo teorema da divergência, temos:

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

Usando coordenadas polares, integramos no cone:

$$x = \rho \cos \phi, \quad x = \rho \operatorname{sen} \phi, \quad z = z$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-z} z\rho d\rho dz d\phi \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-z} z\rho d\rho dz \\
&= \pi \int_0^1 z(1-z)^2 dz = \pi \int_0^1 z(z-1)^2 dz \\
&= \frac{1}{2}\pi \int_{-1}^0 u^2 du = \frac{1}{6}\pi
\end{aligned}$$

Resposta do item b Escrevemos o fluxo através da superfície como a soma de dois fluxos:

$$\Phi = \Phi_c + \Phi_b$$

onde Φ_c é o fluxo através da superfície cônica e Φ_b é o fluxo através da superfície plana.

$$\begin{aligned}
\Phi_b &= \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot (-\vec{k}) dS = -\iint_{S_1} (2 + z^2) dS \\
&= -2 \iint_{S_1} dS = -2\pi \quad (\text{área do círculo}) .
\end{aligned}$$

Para calcular Φ_c, projetamos a superífice cônica, S_2, no plano xy:

$$G(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2} - 1$$

$$\vec{\nabla} G = -\vec{i} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \vec{j} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \vec{k}$$

Vemos que $\vec{n} = \dfrac{\vec{\nabla} G}{\|\vec{\nabla} G\|}$, pelo que

$$\Phi_c = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dS$$

e

$$\vec{F}\cdot\vec{\nabla}G = (2+z^2) = 2+\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 2+(1-\rho)^2 = \rho^2-2\rho+3$$

Onde se usa o sistema de coordenadas polares:

$$x = \rho\cos\phi, \quad x = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$\begin{aligned}
\Phi_c &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\rho^2+2\rho+3\right)\rho d\rho d\phi \\
&= 2\pi\int_0^1 \left(\rho^3-2\rho^2+3\rho\right)d\rho = 2\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right) = 2\pi\frac{3-8+18}{12} = \frac{13}{6}\pi
\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos o fluxo total:

$$\Phi = \Phi_c+\Phi_b = \frac{13}{6}\pi - 2\pi = \frac{1}{6}\pi$$