UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2015/1
Prova da área II

1	2	3	4	Total

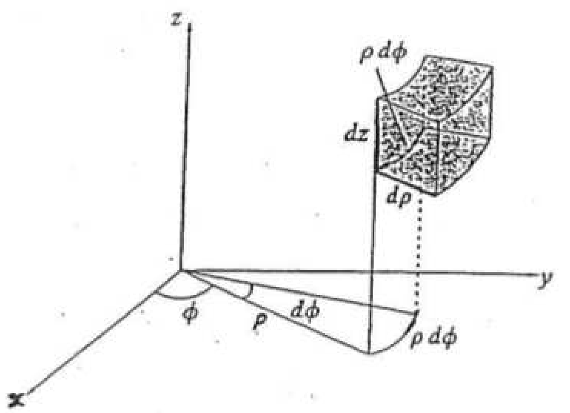
Nome: ________________________________ **Cartão:** ____________

Regras a observar:

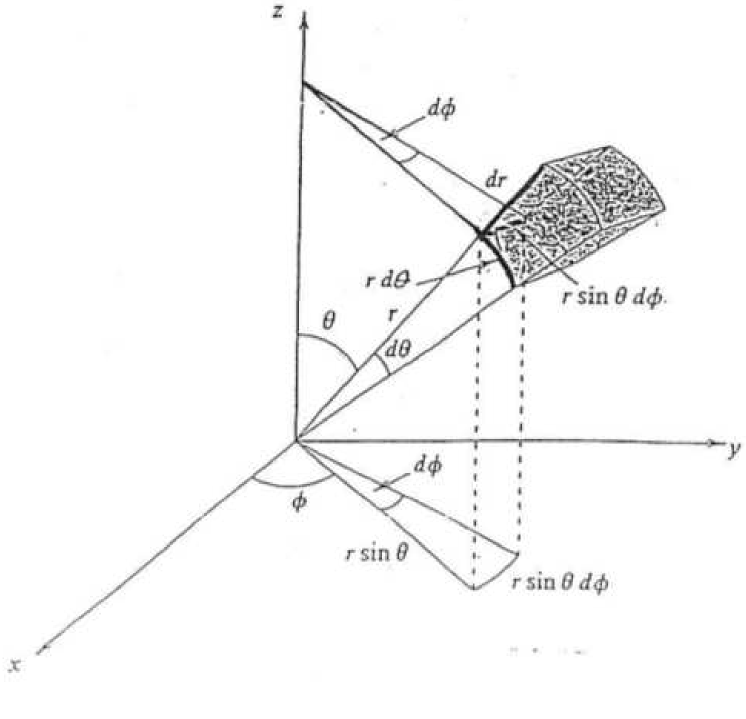
- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Mantenha a caderno de questões grampeado.
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.

COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

a) Coordenadas cilíndricas : ρ, ϕ, z



b) Coordenadas esféricas : r, θ, ϕ



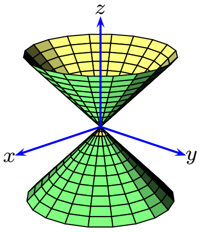
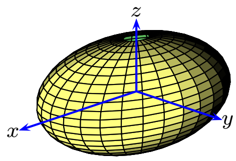
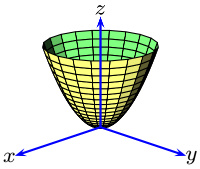
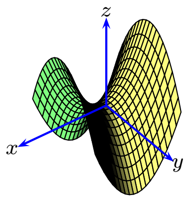
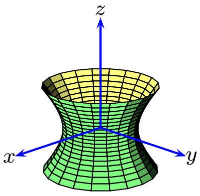
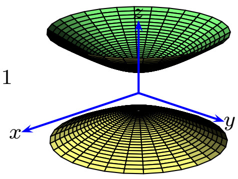
Cone elíptico: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 	Elipsóide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 
Parabolóide Elíptico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 	Parabolóide Hiperbólico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ 
Hiperbolóide de uma folha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 	Hiperbolóide de duas folha: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times f\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = G \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - F \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$

• **Questão 1** (2.5 pontos) Considere uma mosca que viaja a partir do ponto $P_0(2,0,0)$ descrevendo um percurso dado pela curva $C : \vec{r} = (2\cos(2t))\vec{i} + (5\,\mathrm{sen}(2t))\vec{j} + t\vec{k}$.

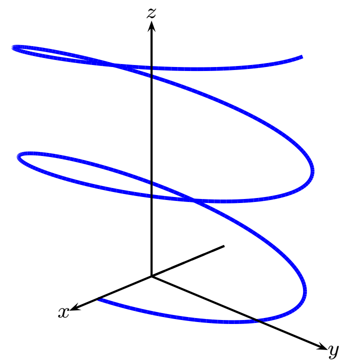
a) (1.0) Calcule os vetores velocidade e aceleração da curva no ponto $\left(-\sqrt{2}, \dfrac{5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{11\pi}{8}\right)$ e esboce-os no gráfico ao lado.

b) (0.5) Esboce os vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ no ponto $\left(\sqrt{2}, 5\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{8}\right)$ (não é necessário calcular).

c) (1.0) Use a definição do vetor binormal $\vec{B}$ para justificar que $\vec{B}$ pode ser calculado pela expressão

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}.$$

e calcule-o no ponto $t = \dfrac{\pi}{8}$.



• **Questão 2** (2.5 pontos) Considere uma partícula com uma trajetória dada pela hélice elíptica $C : \vec{r} = (2\cos(2t))\vec{i} + (5\,\mathrm{sen}(2t))\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \le t \le \pi$, sujeita a um campo de forças $\vec{F} = -zy\vec{i} + zx\vec{j} + z^2\vec{k}$.

a) (0.6) Verfique se o campo $\vec{F}$ é conservativo e, caso afirmativo, calcule o potencial.

b) (0.7) Calcule a integral de linha

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

c) (0.6) Discuta se o trabalho realizado pela partícula por dois caminhos diferentes pode ser o mesmo. Calcule a integral de linha

$$\int_D \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde D é a reta que liga os pontos $(2, 0, 0)$ e $(2, 0, \pi)$.

d) (0.6) Use o teorema fundamental para integral de linha para discutir a coerência dos itens a), b) e c).

• **Questão 3** (2.5 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F} = xz\vec{i} + x\vec{j} + \frac{y^2}{2}\vec{k}$, a superfície S_1 formada pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ e a superfície S_2 formada pelo cone $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$, ambas orientada no sentido côncavo-convexo.

a) (1.5) Calcule as seguintes integrais de superfície:

$$\iint_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS$$

e

$$\iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS.$$

convertendo-as em integrais duplas iteradas (sem usar os teoremas de Stokes e divergência).

b) (1.0) Use o teorema de Stokes para justificar o resultado do item a). É possível conhecer o fluxo rotacional do campo $\vec{F}$ através da superfície $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$ usando o resultado do item a)?

• **Questão 4** (2.5 pontos) Seja V a região limitada pela superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = 0$ e $z = 2$. Considere a orientação positiva das superfícies que limitam V para fora do cilindro. Dado o campo vetorial $\vec{F} = xy\vec{i} + \vec{j} + (x^2 + y^2)z\vec{k}$, calcule o fluxo através da superfície lateral S do cilindro,

$$\phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

de duas formas distintas:

a) (1.0) Transformando em integrais duplas iteradas (sem usar os teoremas de Stokes e Divergência). Dica: Quebre a superfície em duas, cada uma da forma $y = f(x, z)$.

b) (1.5) Usando o teorema da divergência e as integrais nas outras superfícies da região.