UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2015/1
Prova da área II

1	2	3	4	Total

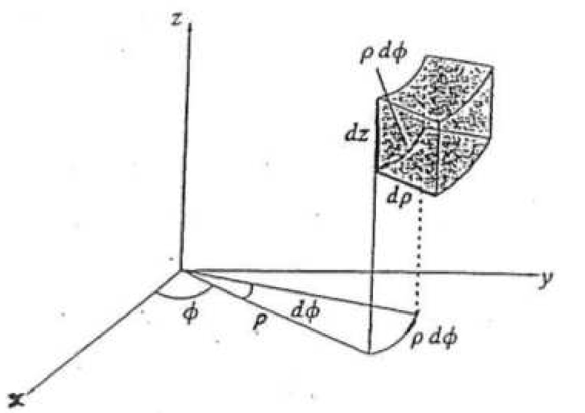
Nome: ____ **Cartão:** ________________

Regras a observar:

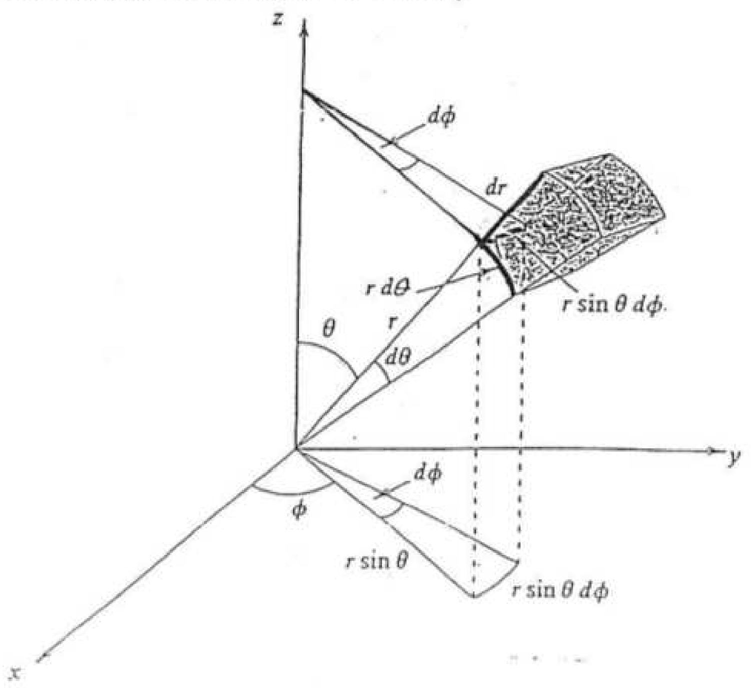
- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Mantenha a caderno de questões grampeado.
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.

COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

a) Coordenadas cilíndricas : ρ, ϕ, z



b) Coordenadas esféricas : r, θ, ϕ



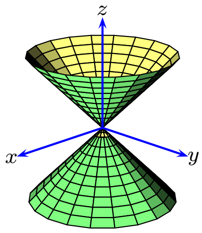
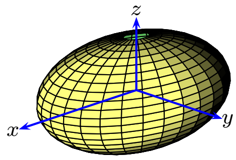
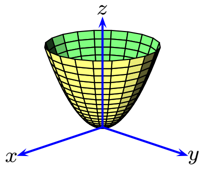
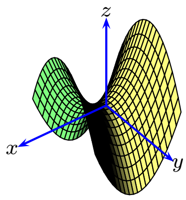
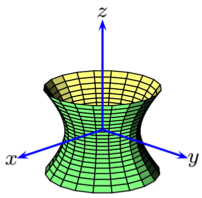
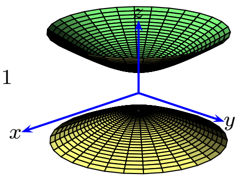
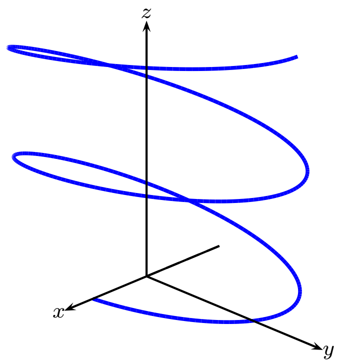
Cone elíptico: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$		Elipsóide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$	
Parabolóide Elíptico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$		Parabolóide Hiperbólico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$	
Hiperbolóide de uma folha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$		Hiperbolóide de duas folha: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$	

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times f\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = G \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - F \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$

• **Questão 1** (2.5 pontos) Considere uma mosca que viaja a partir do ponto $P_0(2,0,0)$ descrevendo um percurso dado pela curva $C: \vec{r} = (2\cos(2t))\vec{i} + (5\,\mathrm{sen}(2t))\vec{j} + t\vec{k}$.

a) (1.0) Calcule os vetores velocidade e aceleração da curva no ponto $\left(-\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{11\pi}{8}\right)$ e esboce-os no gráfico ao lado.



b) (0.5) Esboce os vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ no ponto $\left(\sqrt{2}, 5\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$ (não é necessário calcular).

c) (1.0) Use a definição do vetor binormal $\vec{B}$ para justificar que $\vec{B}$ pode ser calculado pela expressão

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}.$$

e calcule-o no ponto $t = \frac{\pi}{8}$.

Solução:a)

$$\vec{v} = \vec{r}' = (-4\,\mathrm{sen}(2t))\vec{i} + (10\cos(2t))\vec{j} + \vec{k}$$

e

$$\vec{a} = \vec{r}'' = (-8\cos(2t))\vec{i} - (20\,\mathrm{sen}(2t))\vec{j}.$$

No ponto $t = \frac{11\pi}{8}$, temos

$$\vec{v} = -2\sqrt{2}\vec{i} - 5\sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}$$

e

$$\vec{a} = \vec{r}'' = 4\sqrt{2}\vec{i} - 10\sqrt{2}\vec{j}.$$

c) O vetor binormal é unitário e ortogonal ao normal e ao tangente. Como

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}(t)|}$$

e

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}(t)|},$$

temos

$$\vec{T}' = \frac{|\vec{r}(t)|\vec{r}''(t) - \vec{r}'(t)|\vec{r}(t)|'}{|\vec{r}(t)|^2}.$$

e

$$\vec{N} = \frac{|\vec{r}(t)|}{|\vec{T}(t)||\vec{r}(t)|^2}\vec{r}''(t) - \frac{|\vec{r}(t)|'}{|\vec{T}(t)||\vec{r}(t)|^2}\vec{r}'(t).$$

Concluímos que os vetores $\vec{T}$ e $\vec{N}$ estão no plano formado por $\vec{r}'$ e $\vec{r}''$. O vetor $\vec{r}' \times \vec{r}''$ é ortogonal ao plano e

$$\frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}$$

é unitário. Usando $\vec{r}'$ e $\vec{r}''$ do item a) e aplicando em $t = \frac{\pi}{8}$, temos:

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 1 \\ -4\sqrt{2} & -10\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 10\sqrt{2}\vec{i} - 4\sqrt{2}\vec{j} + 80\vec{k}$$

e

$$\vec{B} = \frac{10\sqrt{2}\vec{i} - 4\sqrt{2}\vec{j} + 80\vec{k}}{\sqrt{200 + 32 + 6400}} = \frac{10\sqrt{2}\vec{i} - 4\sqrt{2}\vec{j} + 80\vec{k}}{\sqrt{6632}}.$$

• **Questão 2** (2.5 pontos) Considere uma partícula com uma trajetória dada pela hélice elíptica $C : \vec{r} = (2\cos(2t))\vec{i} + (5\,\mathrm{sen}(2t))\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \leq t \leq \pi$, sujeita a um campo de forças $\vec{F} = -zy\vec{i} + zx\vec{j} + z^2\vec{k}$.

a) (0.6) Verfique se o campo $\vec{F}$ é conservativo e, caso afirmativo, calcule o potencial.

b) (0.7) Calcule a integral de linha

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

c) (0.6) Discuta se o trabalho realizado pela partícula por dois caminhos diferentes pode ser o mesmo. Calcule a integral de linha

$$\int_D \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde D é a reta que liga os pontos $(2, 0, 0)$ e $(2, 0, \pi)$.

d) (0.6) Use o teorema fundamental para integral de linha para discutir a coerência dos itens a), b) e c).

Solução:a) O campo é conservativo se, e somente se, o rotacional for nulo.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -zy & zx & z^2 \end{vmatrix} = -x\vec{i} - y\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

Portanto o campo não é conservativo.

b)Aplicamos a definição para obter

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^\pi \left(-zy\vec{i} + zx\vec{j} + z^2\vec{k}\right) \cdot \left((-4\,\mathrm{sen}(2t))\vec{i} + (10\cos(2t))\vec{j} + \vec{k}\right) dt \\
&= \int_0^\pi \left(-5t\,\mathrm{sen}(2t)\vec{i} + 2t\cos(2t)\vec{j} + t^2\vec{k}\right) \cdot \left((-4\,\mathrm{sen}(2t))\vec{i} + (10\cos(2t))\vec{j} + \vec{k}\right) dt \\
&= \int_0^\pi \left(20t\,\mathrm{sen}^2(2t) + 20t\cos^2(2t) + t^2\right) dt \\
&= \int_0^\pi \left(20t + t^2\right) dt \\
&= 10t^2 + \frac{t^3}{3}\bigg|_0^\pi \\
&= 10\pi^2 + \frac{\pi^3}{3}
\end{aligned}$$

c) O campo não é conservativo, portanto a integral por dois caminhos diferentes não precisa ser necessariamente igual. Seja $D : \vec{r} = 2\vec{i} + t\vec{k}$, $0 \leq t \leq \pi$, uma parametrização para a reta, então

$$\begin{aligned}
\int_D \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^\pi t^2 dt \\
&= \frac{\pi^3}{3}.
\end{aligned}$$

d) O teorema fundamental para integral de linha diz que se o campo é conservativo, a integral é dado pela diferença de potencial nos extremos, ou seja, não depende do caminho. No item a) provamos que o campo não é conservativo e, nos itens b) e c), que as integrais por dois caminhos diferentes dão resultados diferentes. Como o teorema fundamental de linhas não se aplica nesse campo, o resultado é coerente.

• **Questão 3** (2.5 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F} = xz\vec{i} + x\vec{j} + \frac{y^2}{2}\vec{k}$, a superfície S_1 formada pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ e a superfície S_2 formada pelo cone $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq 1$, ambas orientada no sentido côncavo-convexo.

a) (1.5) Calcule as seguintes integrais de superfície:

$$\iint_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS$$

e

$$\iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS.$$

convertendo-as em integrais duplas iteradas (sem usar os teoremas de Stokes e divergência).

b) (1.0) Use o teorema de Stokes para justificar o resultado do item a). É possível conhecer o fluxo rotacional do campo $\vec{F}$ através da superfície $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$ usando o resultado do item a)?

Solução:a) Primeiro vamos calcular o rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \dfrac{y^2}{2} \end{vmatrix} = y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}.$$

Agora, calculamos o vetor normal a cada superfície fazendo $G_1 = z + x^2 + y^2 - 1 = 0$ e $G_2 = z + \sqrt{x^2+y^2} - 1$. Temos

$$\vec{\nabla} G_1 = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

e

$$\vec{\nabla} G_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \vec{k}.$$

Logo, sendo C o círculo unitário no plano xy, temos:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS &= \iint_C (y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}) \cdot (2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}) dA \\
&= \iint_C (4xy + 1) dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4\rho\cos(\theta)\rho\,\mathrm{sen}(\theta) + 1)\rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(2\rho^3 \,\mathrm{sen}(2\theta) + \rho\right) d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{4} + \frac{1}{2}\right) d\theta \\
&= \left| -\frac{\cos(2\theta)}{8} + \frac{\theta}{2} \right|_0^{2\pi} = \pi
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS &= \iint_C \left(\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1\right) dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + 1\right) \rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\rho\,\mathrm{sen}(2\theta) + \rho\right) d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{2} + \frac{1}{2}\right) d\theta \\
&= \left| -\frac{\cos(2\theta)}{4} + \frac{\theta}{2} \right|_0^{2\pi} = \pi.
\end{aligned}$$

b)Observe que o círculo unitário C limita as duas superfícies, S_1 e S_2. O teorema de Stokes nos dá

$$\iint_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e

$$\iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Logo,

$$\iint_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS.$$

Também, a superfície S_3 descrita no item b) é limitada por C. Portanto,

$$\iint_{S_3} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS = \pi.$$

• **Questão 4** (2.5 pontos) Seja V a região limitada pela superfície cilíndrica $x^2+y^2=1$ e os planos $z=0$ e $z=2$. Considere a orientação positiva das superfícies que limitam V para fora do cilindro. Dado o campo vetorial $\vec{F}=xy\vec{i}+\vec{j}+(x^2+y^2)z\vec{k}$, calcule o fluxo através da superfície lateral S do cilindro,

$$\phi=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS,$$

de duas formas distintas:

a) (1.0) Transformando em integrais duplas iteradas (sem usar os teoremas de Stokes e Divergência). Dica: Quebre a superfície em duas, cada uma da forma $y=f(x,z)$.

b) (1.5) Usando o teorema da divergência e as integrais nas outras superfícies da região.

Solução:a) Separamos a superfície lateral em duas: $S_1: y=\sqrt{1-x^2},\ 0\le z\le 2$ e $S_2: y=-\sqrt{1-x^2},\ 0\le z\le 2$. Definimos $G_1=y-\sqrt{1-x^2}$ e $G_2=y+\sqrt{1-x^2}$. Temos

$$\vec{\nabla}G_1=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\vec{i}+\vec{j}$$

e

$$\vec{\nabla}G_2=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\vec{i}+\vec{j}.$$

Os fluxos através de S_1 e S_2 são

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}dS\\ &= \int_0^2\int_{-1}^1 \frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2}}+1dxdz\\ &= \int_0^2\int_{-1}^1 x^2+1dxdz\\ &= \int_0^2 \frac{2}{3}+2dz\\ &= \frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}dS\\ &= -\int_0^2\int_{-1}^1 \frac{-x^2y}{\sqrt{1-x^2}}+1dxdz\\ &= -\int_0^2\int_{-1}^1 x^2+1dxdz\\ &= -\int_0^2 \frac{2}{3}+2dz\\ &= -\frac{4}{3}-4=-\frac{16}{3}.\end{aligned}$$

O sinal negativo em ϕ_2 é necessário, pois a orientação de $\vec{\nabla}G_2$ está para dentro. Logo,

$$\phi=\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}dS=0.$$

b) Sendo S a superfície lateral do cilindro, R superfície que limita por baixo e T a superfície que limita por cima, então o teorema da divergência diz:

$$\iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV=\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}dS+\iint_R\vec{F}\cdot\vec{n}dS+\iint_T\vec{F}\cdot\vec{n}dS.$$

Logo,

$$\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_R\vec{F}\cdot\vec{n}dS+\iint_T\vec{F}\cdot\vec{n}dS-\iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV.$$

Temos $R: z=0,\ x^2+y^2\le 1$ e $T: z=2,\ x^2+y^2\le 1$. Definimos $G_1=z=0$ e $G_2=z-2=0$ e calculamos $\vec{\nabla}G_1=\vec{\nabla}G_2=\vec{k}$. Logo,

$$\iint_R\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_C(x^2+y^2)\cdot 0dS=\int_C 0dA=0$$

e

$$\iint_T\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_C(x^2+y^2)\cdot 2dS=2\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho^3d\rho d\theta=\pi.$$

Também,

$$\iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV=\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\rho\,\mathrm{sen}(\theta)+\rho^2\right)\rho d\rho d\theta dz=\pi$$

Assim,

$$\phi=\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}dS=0.$$