UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2015/2
Prova da área II

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

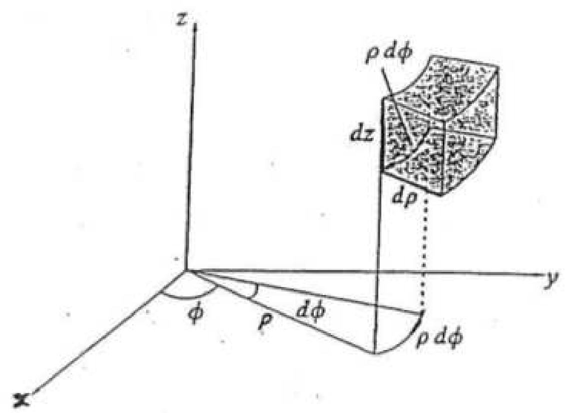
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

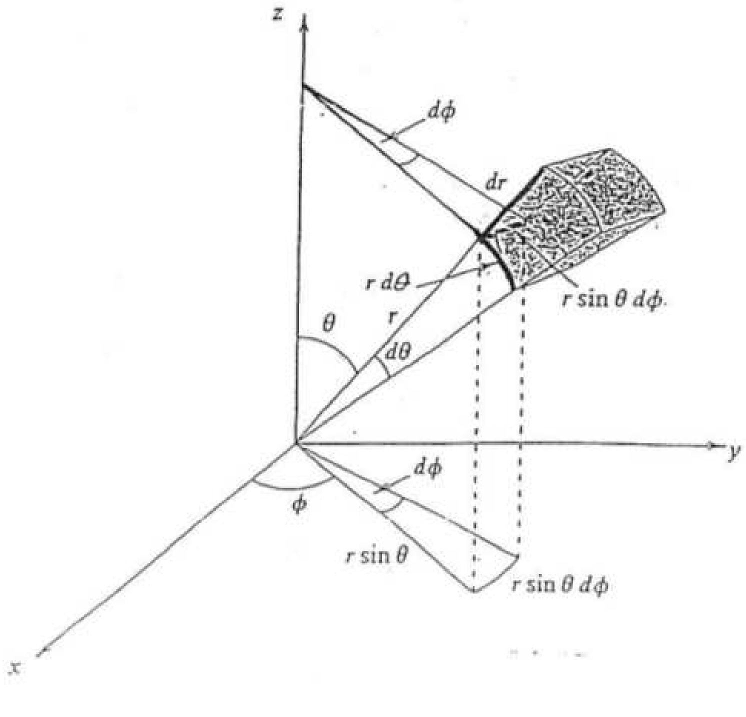
- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

a) Coordenadas cilíndricas : ρ, ϕ, z



b) Coordenadas esféricas : r, θ, ϕ



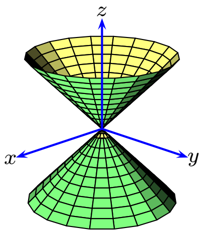
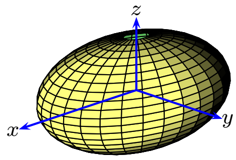
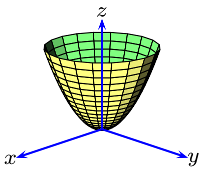
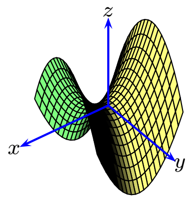
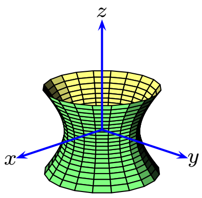
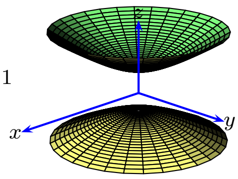
Cone elíptico: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 	Elipsóide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 
Parabolóide Elíptico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 	Parabolóide Hiperbólico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ 
Hiperbolóide de uma folha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 	Hiperbolóide de duas folhas: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$

- **Questão 1** (1.0 ponto) A curvatura da curva $y = 2x^2 + 1$ no ponto $(0, 1)$ é:
  ( ) 6.
  ( ) 5.
  (X) 4.
  ( ) 3.
  ( ) 2.
  ( ) 1.

- **Questão 2** (1.0 ponto) Dado o campo vetorial $\vec{F}$ e o campo escalar f é correto afirmar que:
  ( ) $\vec{\nabla} f \times \vec{F} = (\vec{F} \times \vec{\nabla}) f$.
  ( ) $\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = \vec{F} \times \vec{\nabla} f + f(\vec{\nabla} \times \vec{F})$.
  ( ) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.
  ( ) $\vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$.
  (X) $\vec{\nabla} \times (\vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \times \vec{F} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\vec{\nabla} \times \vec{F}$.
  ( ) $\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) = \vec{\nabla}^2 \vec{F}$.

- **Questão 3** (1.0 ponto) Dado o campo conservativo $\vec{F} = 2xy^3\vec{i} + (1 + 3x^2y^2)\vec{j} + \vec{k}$, a função potencial é:

  (X) $\varphi(x, y) = z + x^2y^3 + y$.

  ( ) $\varphi(x, y) = 1 + x^2y^3 + y$.

  ( ) $\varphi(x, y) = 1 + x^2y^3 + 1$.

  ( ) $\varphi(x, y) = z + x^3y^2 + y$.

  ( ) $\varphi(x, y) = 1 + x^3y^2 + y$.

  ( ) $\varphi(x, y) = x^2y^3 + y$.

- **Questão 4** (1.0 ponto)O trabalho realizado pelo campo da questão 3 ao longo da reta que liga a origem até o ponto $P(1, 2, -1)$ é:

  ( ) 5.

  ( ) 6.

  ( ) 7.

  ( ) 8.

  (X) 9.

  ( ) 10

• **Questão 5** (1.0 ponto) O fluxo do campo $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$ através da superfície dada pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$ orientada no sentido côncavo-convexo é

( ) $-\dfrac{\pi}{3}$.

( ) $-\dfrac{\pi}{6}$.

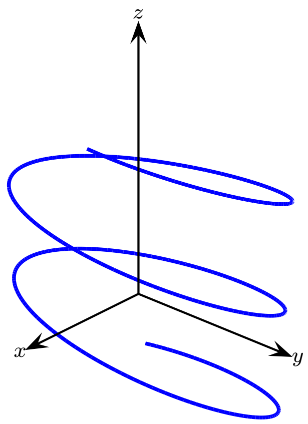
( ) $-\dfrac{\pi}{12}$.

( ) $\dfrac{\pi}{12}$.

(X) $\dfrac{\pi}{6}$.

( ) $\dfrac{\pi}{3}$.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Na figura abaixo é dada uma curva representada por um pedaço de uma hélice elíptica. É correto afirmar que:



( ) A curva possui torção nula e curvatura positiva em todos os pontos.

( ) A curva possui torção positiva e curvatura positiva em todos os pontos.

(X) A curva possui torção negativa e curvatura positiva em todos os pontos.

( ) A curva possui torção nula e curvatura nula em todos os pontos.

( ) A curva possui torção positiva e curvatura nula em todos os pontos.

( ) A curva possui torção negativa e curvatura nula em todos os pontos.

( ) Não é possível saber o sinal da torção, pois a orientação positiva da curva não é informada.

• **Questão 7** (2.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F}$ dado na figura 1 e marque verdadeiro, falso ou não sei. Observação: item respondido corretamente vale 0.2, item respondido incorretamente vale -0.2 e item marcado como não sei vale 0.0.

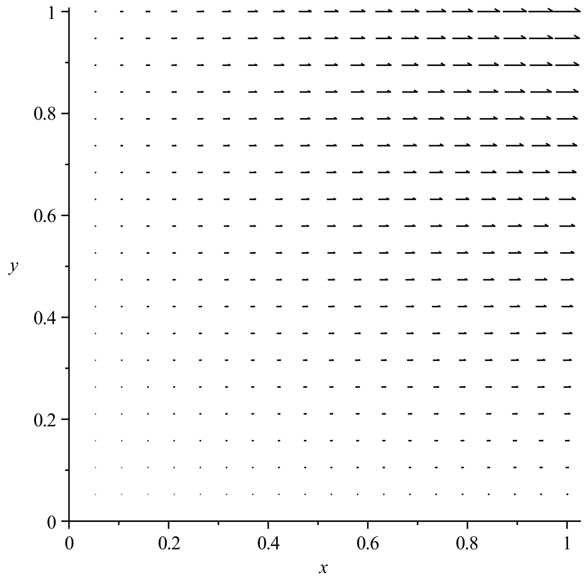


Figura 1: Campo vetorial $\vec{F}$

i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(0.4, 1) = 0$.

ii) Se C é a reta que liga os pontos $(0.5, 0)$ e $(0.5, 1)$, então $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

iii) $\vec{F}$ é um campo irrotacional.

iv) $\vec{F}$ é um campo central da forma $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

v) Para $x > 0$ e $y > 0$, $\vec{F}$ é da forma $\vec{F} = f(x, y)\vec{i}$, $f(x, y) \geq 0$.

vi) Se $y = 0$, então $\vec{F}(x, y) = \vec{j}$.

vii) Assumindo que os eixos x, y e z obedecem a regra da mão direita, então $\vec{\nabla} \times \vec{F} = g(x, y)\vec{k}$, onde $g \leq 0$.

viii) O divergente de $\vec{F}$ no ponto $(0, 0.2)$ é certamente nulo, pois $\vec{F} = \vec{0}$.

ix) $\|\vec{F}(1, 1)\| > \|\vec{F}(0.5, 0.5)\|$.

x) A integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é uma curva que liga os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, independe de C.

	Verdadeiro	Falso	Não Sei
i)		X	
ii)	X		
iii)		X	
iv)		X	
v)	X		

	Verdadeiro	Falso	Não Sei
vi)		X	
vii)	X		
viii)		X	
ix)	X		
x)		X	

• **Questão 8** (2.0 pontos): Use o Teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo de força

$$\vec{F} = xz^2\cos(y)\vec{i} + \cos(y)\vec{j} + \operatorname{sen}(yz)\vec{k}$$

ao deslocar uma partícula ao longo do quadrado contido no plano xz de vértices $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,0,0)$ orientado no sentido anti-horário.

Solução: Primeiro calculamos o rotacional do campo $\vec{F}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz^2\cos(y) & \cos(y) & \operatorname{sen}(yz) \end{vmatrix} = z\cos(yz)\vec{i} + 2xz\cos(y)\vec{j} - xz^2\operatorname{sen}(y)\vec{k}.$$

Seja C o quadrado que limita a superfície S: $y = 0$, $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 1$. Pelo teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{j} dS \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2xz\cos(y(x,z))dxdz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2xz\cos(0)dxdz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2xzdxdz \\ &= \int_0^1 \left[x^2\right]_0^1 zdz \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$