UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2016/1
Prova da área II

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

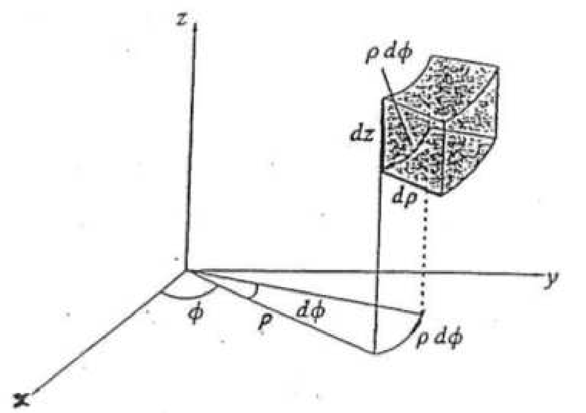
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

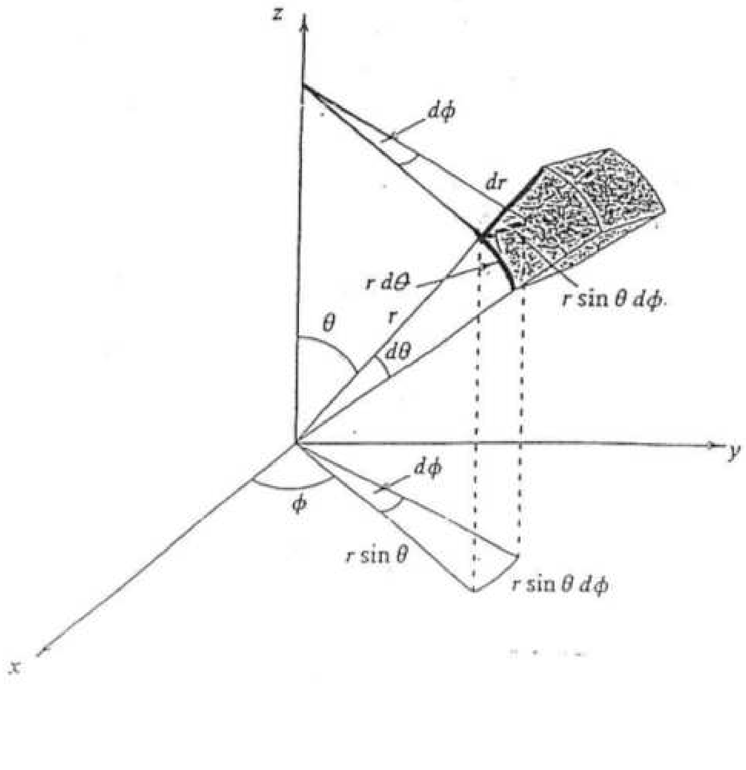
- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

a) Coordenadas cilíndricas : ρ, ϕ, z



b) Coordenadas esféricas : r, θ, ϕ



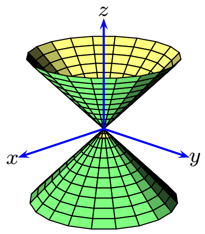
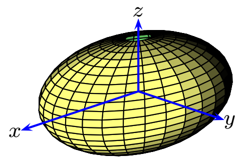
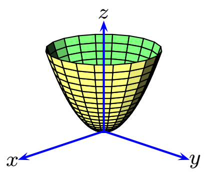
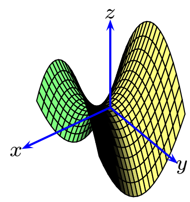
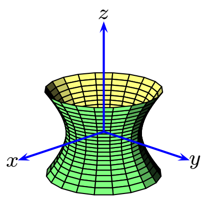
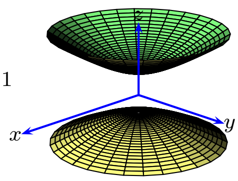
Cone elíptico: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 	Elipsóide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 
Parabolóide Elíptico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 	Parabolóide Hiperbólico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ 
Hiperbolóide de uma folha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 	Hiperbolóide de duas folhas: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$

Algumas fórmulas:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \dfrac{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\dfrac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \dfrac{(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t))\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\dfrac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\dfrac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \dfrac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \dfrac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \dfrac{dv}{dt}$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Uma abelha se desloca com velocidade escalar constante ao longo de sua trajetória. Em um determinado instante sua velocidade (em m/s) é dada pelo vetor $\vec{v} = -3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$. Sabendo que o módulo da aceleração neste instante vale 21 m/s^2, assinale a alternativa que melhor aproxima o valor da curvatura em m^{-1}:

( ) $0,2$.

( ) $0,4$.

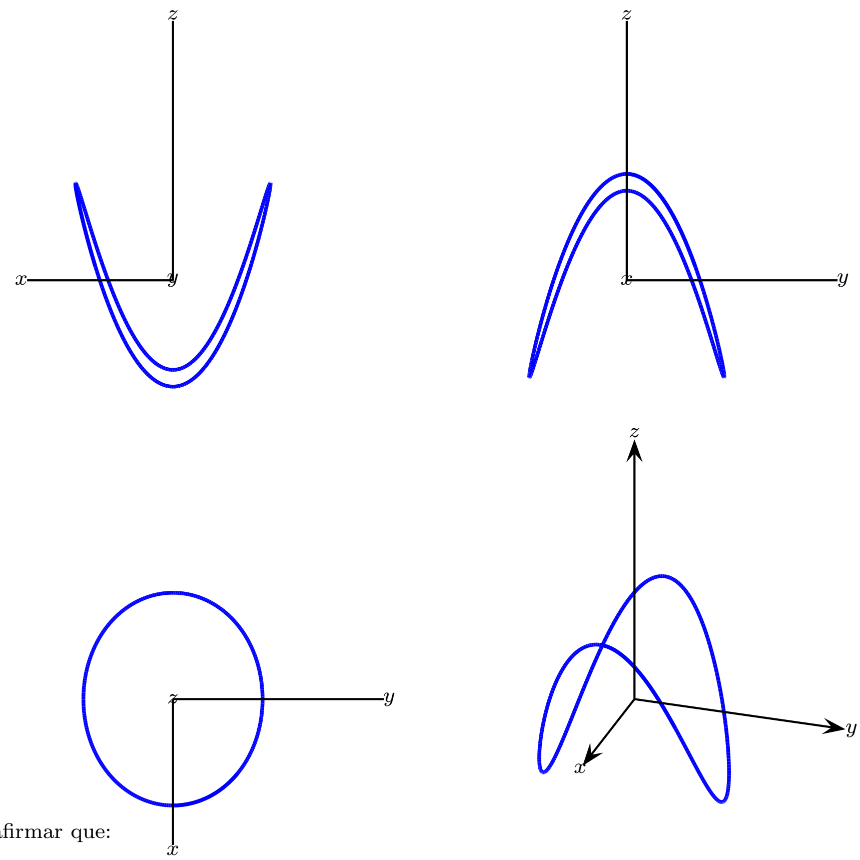
( ) $0,7$.

( ) $1,0$.

( ) $1,5$

( ) $2,5$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere a curva representada no gráfico abaixo:



Pode-se afirmar que:

( ) A torção assume apenas valores positivos.

( ) A torção assume apenas valores negativos.

( ) A torção é nula em todos os pontos.

( ) A torção não está bem definida em alguns pontos.

( ) A torção assume valores positivos, negativos e zero.

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere os campos escalares $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ e os campos vetoriais $\vec{F}(x, y, z)$, $\vec{G}(x, y, z)$ e $\vec{H}(x, y, z)$ relacionados pelas seguintes expressões:

$$\nabla^2 f = g, \quad \nabla^2 g = -g, \quad \vec{F} = \vec{\nabla} f \quad \text{e} \quad \vec{G} = \vec{\nabla} g, \quad \vec{H} = \vec{F} + \vec{G}$$

Assinale a alternativa ***FALSA***:

( ) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{G}$

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = g$.

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 2g$.

( ) $\vec{\nabla}^2 \left(\vec{\nabla}^2 g - f\right) = 0$.

( ) $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{G} + g\vec{F}$.

• **Questão 4** (1.0 ponto) A componente tangencial da aceleração da trajetória dada por $\vec{r} = t^2\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$ no ponto t=1 é:

( ) $a_T = -\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

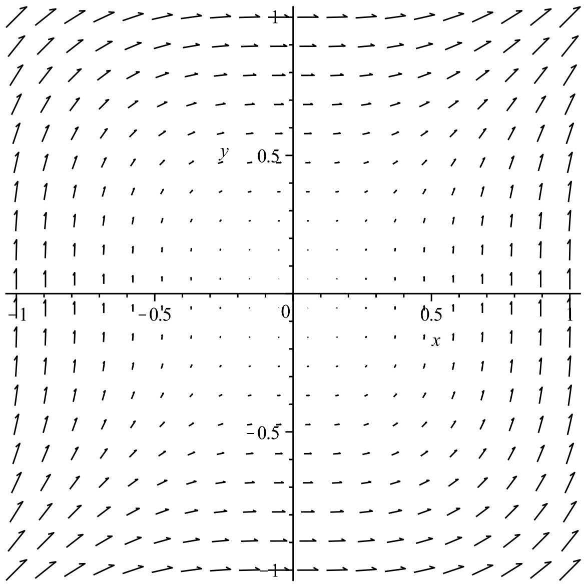
( ) $a_T = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

( ) $a_T = 0$.

( ) $a_T = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

( ) $a_T = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

• **Questão 5** (1.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F}$ dado abaixo.



Pode-se afirmar que

( ) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para qualquer circunferência C centrada na origem e raio menor que 1.

( ) Considere as curvas $C_1 : \vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j}$, $-1 \leq t \leq 1$, $C_2 : \vec{r} = t\vec{i} - \vec{j}$, $-1 \leq t \leq 1$ e $C_3 : \vec{r} = \vec{i} + t\vec{j}$, $-1 \leq t \leq 1$. Então $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

( ) Considere a curva $C : \vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j}$, $-1 \leq t \leq 1$. Então $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

( ) Considere a curva $C : \vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Então $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$.

( ) Nenhuma das anteriores.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Considere as seguintes duas curvas abertas:

$$C_1 : \ \vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

$$C_2 : \ \vec{r} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\vec{i} + (2^t - 1)\vec{j} + t\vec{k}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

e o seguinte campo vetorial:

$$\vec{F} = (e^y + e^x)\vec{i} + xe^y\vec{j} + 3z^2\vec{k}.$$

Pode-se afirmar que:

( ) Como o campo é convervativo, então $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

( ) Como o campo é convervativo, então $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

( ) Como o campo é convervativo, então $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

( ) Como o campo não é convervativo, então $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

( ) Como o campo não é convervativo, então $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não podem ser calculadas.

• **Questão 7** (2.0 pontos) Considere o campo vetorial radial $\vec{F} = r^2\vec{r}$ e S a superfície composta superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente por $\{(x, y, z);\ x^2 + y^2 \leq 16,\ z = 0\}$ orientada para fora. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície fechada S usando o Teorema da Divergência.

• **Questão 8** (2.0 pontos) Use o teorema de Stokes para calcular a circulação dada por $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ sob o plano xy orientada no sentido horário e $\vec{v} = (1 + z^2)y\vec{i} + (y - x)\vec{j} + x^2y^2\vec{k}$ usando

a) uma parametrização direta da curva.

b) o Teorema de Stokes.