1-6	7	8	Total

UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2016/1
Prova da área II

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

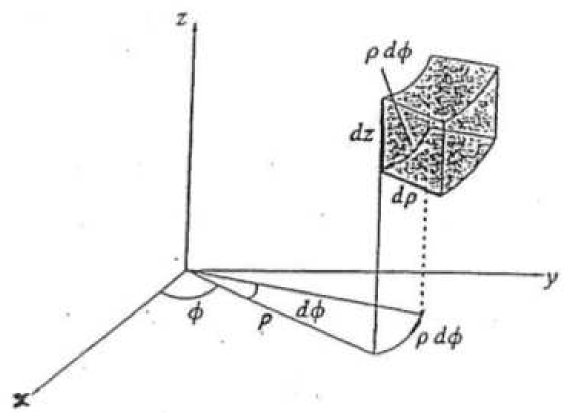
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

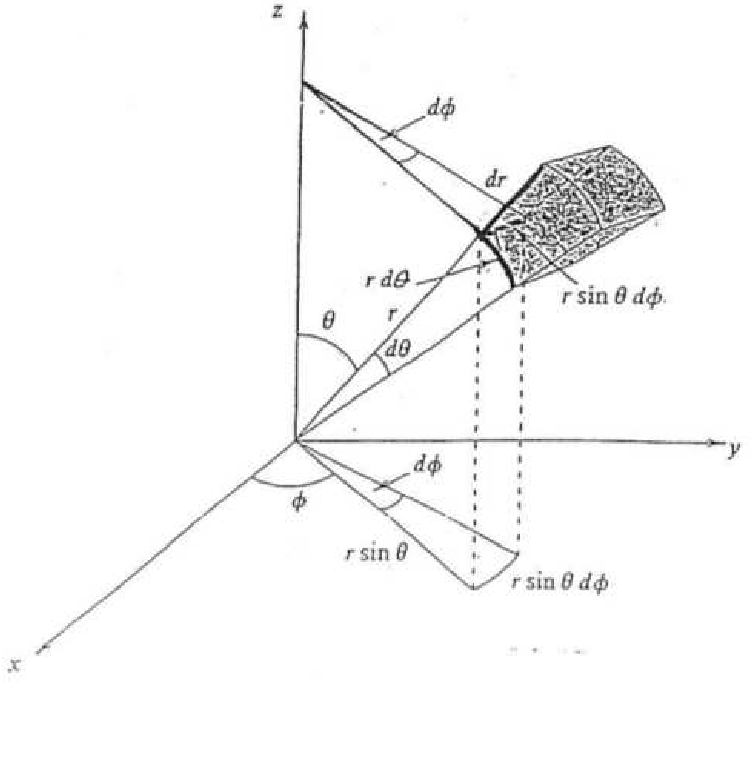
- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente..

COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

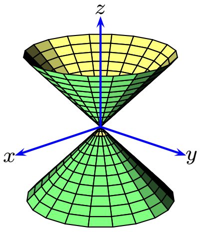
a) Coordenadas cilíndricas : ρ, ϕ, z



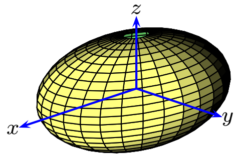
b) Coordenadas esféricas : r, θ, ϕ



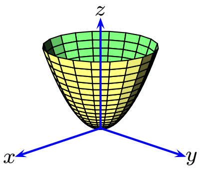
Cone elíptico: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



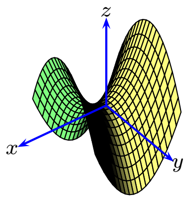
Elipsóide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



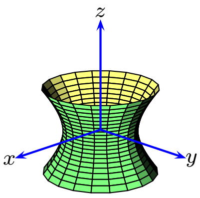
Parabolóide Elíptico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



Parabolóide Hiperbólico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$



Hiperbolóide de uma folha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



Hiperbolóide de duas folhas: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

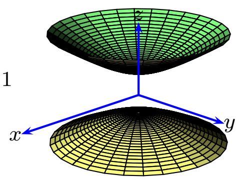


Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = G \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - F \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + +\vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$

Algumas fórmulas:

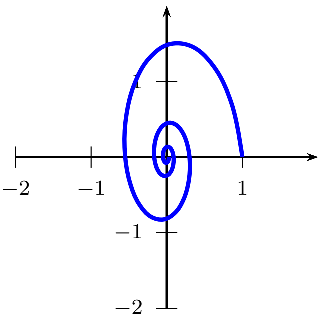
Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert \dfrac{d\vec{T}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert = \dfrac{\Vert \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \Vert}{\Vert \vec{r}'(t) \Vert^3}$
Torção	$\tau = -\dfrac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \dfrac{\left(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\right) \cdot \vec{r}'''(t)}{\Vert \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert \dfrac{d\vec{B}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \dfrac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \dfrac{\Vert \vec{a} \times \vec{v} \Vert}{v} = \dfrac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \dfrac{dv}{dt}$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Uma abelha se desloca com velocidade escalar constante ao longo de sua trajetória. Em um determinado instante sua velocidade (em m/s) é dada pelo vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$. Sabendo que o módulo da aceleração neste instante vale 2 m/s^2, assinale a alternativa que melhor aproxima o valor da norma do vetor $\vec{a} \times \vec{v}$

( ) 49.
( ) 21.
( ) 14.
( ) 9.
( ) 4
( ) 0

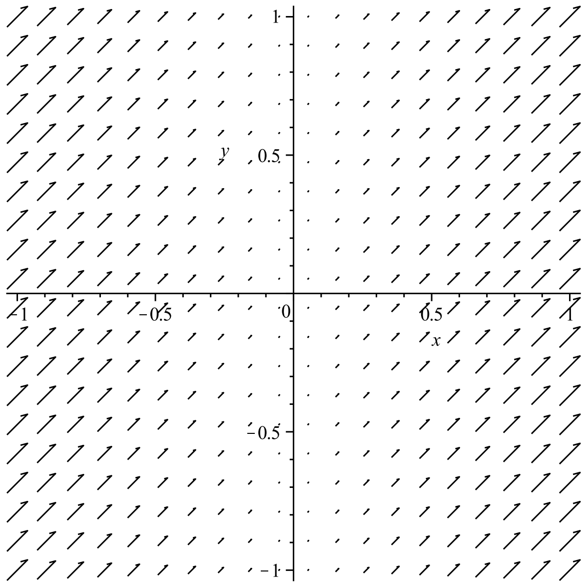
• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere a curva contida no plano xy representada no gráfico abaixo. Pode-se afirmar que

( ) A curvatura é crescente com o afastamento da origem.
( ) A curvatura é decrescente com o afastamento da origem.
( ) A curvatura é nula em 12 pontos da curva.
( ) A curvatura é nula em todos os pontos.
( ) A curvatura é não nula mas sempre constante.



• **Questão 3** (1.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F}$ dado abaixo. Pode-se afirmar que:

( ) O divergente do campo assume valores positivos e negativos, mas não passa por zero.
( ) O divergente do campo assume valores positivos e negativos, inclusive zero.
( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ em todos os pontos.
( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} > 0$ em todos os pontos.
( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$ em todos os pontos.



• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere o campo escalar dado por

$$g = \text{sen}(x + y + z) + x^2$$

e os campos vetoriais dados por

$$\vec{F} = \cos(x)e^z\vec{i} + \text{sen}(x)e^z\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{G} = \vec{\nabla} g$$

Assinale a alternativa ***FALSA***:

( ) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{0}$
( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0$.
( ) $\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{0}$.
( ) Existe f tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$.
( ) $\vec{F}$ é um campo com divergência nula.

• **Questão 5** (1.0 ponto) A torção da curva $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ no ponto $t = 1$ é

( ) $\dfrac{3}{76}$.
( ) $\dfrac{6}{\sqrt{19}}$.
( ) $\dfrac{3}{19}$.
( ) $-\dfrac{3}{76}$.
( ) $-\dfrac{6}{\sqrt{19}}$.
( ) $-\dfrac{3}{19}$.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Considere as seguintes duas superfícies abertas:

$$S_1: \ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0.$$

$$S_2: \ x^2 + y^2 \leq 4, \qquad z = 0.$$

ambas orientadas de forma que $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$, ou seja, componente vertical da normal não negativa. Também considere a região do espaço V limitada superiormente por S_1 e inferiormente por S_2. Pode-se afirmar que, para o campo vetorial $\vec{F} = e^{x+y+z}\vec{i} + ye^x\vec{j} + e^y\vec{k}$, vale:

( ) $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$

( ) $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV.$

( ) $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV.$

( ) $\displaystyle\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS < 0.$

( ) $\displaystyle\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = 0.$

• **Questão 7** (2.0 ponto) Use o teorema de Stokes para calcular a circulação dada por $\displaystyle\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$, onde C é triângulo de vértices $V_1 = (0,0,0)$, $V_2 = (1,0,0)$, $V_3 = (1,1,1)$ orientado no sentido $V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_1$ e $\vec{v} = y\vec{i} + xz^2\vec{j} + xy^2\vec{k}$.

• **Questão 8** (2.0 ponto) Considere o campo $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + e^z\vec{k}$ e S a superfície composta inferiormente por $z = x^2 + y^2$ e superiormente por $\{(x, y, z);\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1\}$ orientada para fora. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície fechada S usando:

a) Usando uma parametrização direta da superfície, isto é, sem usar o Teorema da Divergência;
b) Usando o Teorema da Divergência.