UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2017/1
Prova da área I

1-8	9	10	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

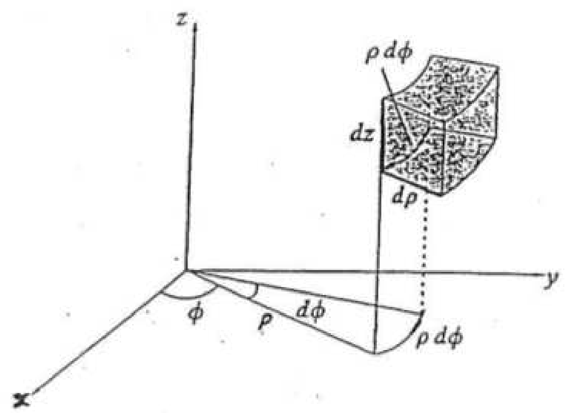
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

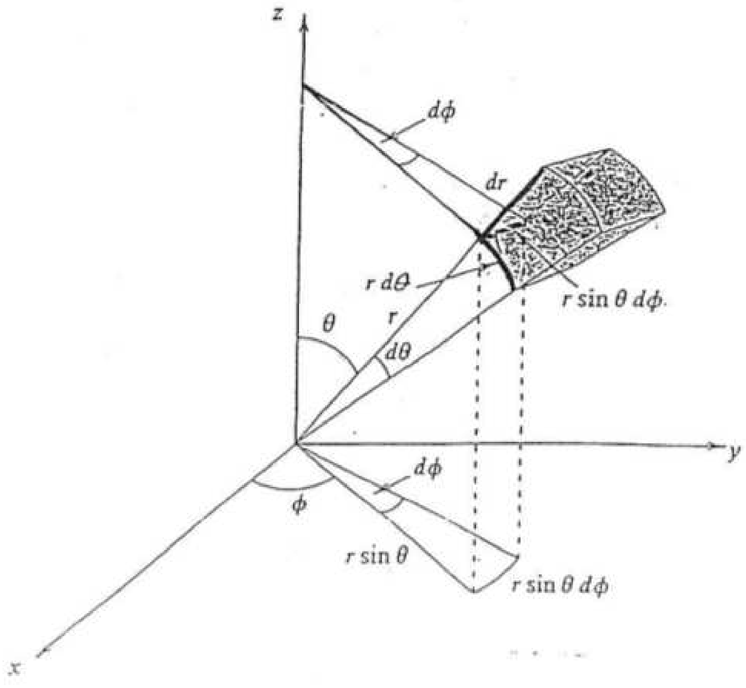
- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

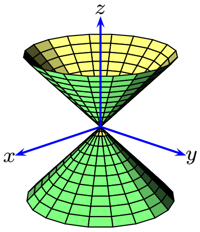
a) Coordenadas cilíndricas : ρ, ϕ, z



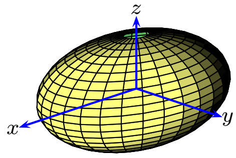
b) Coordenadas esféricas : r, θ, ϕ



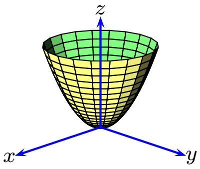
Cone elíptico: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



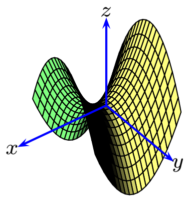
Elipsóide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



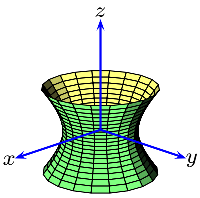
Parabolóide Elíptico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



Parabolóide Hiperbólico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$



Hiperbolóide de uma folha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



Hiperbolóide de duas folhas: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

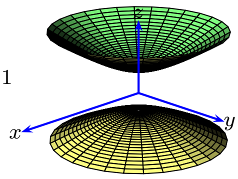


Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$

Algumas fórmulas:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \dfrac{\lVert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\dfrac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \dfrac{\left(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right)\cdot\vec{r}'''(t)}{\lVert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\dfrac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\dfrac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert$
Aceleração normal	$a_N = \dfrac{\lVert\vec{a}\times\vec{v}\rVert}{v} = \dfrac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \dfrac{dv}{dt}$

• **Questão 1** (0.75 ponto) Considere que uma partícula descreva a trajetória trocoidal dada por

$$x(t) = at + \cos(t), \quad y(t) = \text{sen}(t), \quad z(t) = 0.$$

Assinale a alternativa que indica uma expressão para o aceleração tangencial:

( ) $\dfrac{a\cos(t)}{\sqrt{a^2+1-2a\,\text{sen}(t)}}$

( ) $\dfrac{-a\,\text{sen}(t)}{\sqrt{a^2+1+2a\cos(t)}}$

(X) $\dfrac{-a\cos(t)}{\sqrt{a^2+1-2a\,\text{sen}(t)}}$

( ) $\dfrac{a\,\text{sen}(t)}{\sqrt{a^2+1-2a\cos(t)}}$

( ) $\dfrac{a\cos(t)}{\sqrt{a^2+1+2a\,\text{sen}(t)}}$

( ) Nenhuma das anteriores.

• **Questão 2** (0.75 ponto) Considere a curva escrita de forma paramétrica como:

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^3.$$

Assinale a alternativa correta a respeito da torção $\tau(t)$:

(X) A curva apresenta torção dextrogira com módulo dado por $\dfrac{3}{9t^4+9t^2+1}$.

( ) A curva apresenta torção dextrogira com módulo dado por $\dfrac{12}{9t^4+9t^2+1}$.

( ) A curva apresenta torção dextrogira com módulo dado por $\dfrac{3}{(3t^2+1)^2}$.

( ) A curva apresenta torção levogira com módulo dado por $\dfrac{3}{9t^4+9t^2+1}$.

( ) A curva apresenta torção levogira com módulo dado por $\dfrac{12}{9t^4+9t^2+1}$.

( ) A curva apresenta torção levogira com módulo dado por $\dfrac{3}{(3t^2+1)^2}$.

( ) Nenhuma das anteriores.

• **Questão 3** (0.75 ponto) Considere os campos dados por

$$\begin{aligned} f &= \cos(x+y+z) \\ g &= z^2 \\ \vec{F} &= \cos(y)\vec{i} + \text{sen}(x)\vec{j} + e^z\vec{k} \end{aligned}$$

Assinale a alternativa que apresenta uma expressão para $\vec{\nabla}g \cdot \vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{\nabla}f\right)$:

(X) $2z(\cos(x) + \text{sen}(y))$

( ) $z^2(\cos(x) + \text{sen}(y))$

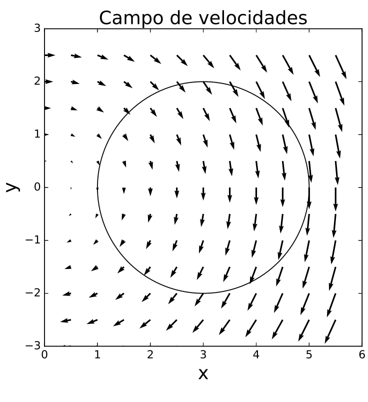
( ) $2z(\cos(x) - \text{sen}(y))$

( ) $-z^2(\cos(x) + \text{sen}(y))$

( ) $2z(-\cos(x) + \text{sen}(y))$

( ) 0

• **Questão 4** (0.75 ponto) Considere o campo $\vec{F} = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}$ representado no gráfico ao lado e as seguintes integrais:



$$I_1 = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad I_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \qquad I_3 = \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde C_1 é o círculo (representado na figura) de raio 2 centrado em $(3,0,0)$ no plano xy orientado no sentido antihorário, C_2 é o segmento de reta que vai do ponto $(0,0,0)$ até $(6,0,0)$ e C_3 é o segmento de reta que vai do ponto $(3,-3,0)$ até $(3,3,0)$. Assinale a alternativa correta:

( ) $I_1 < 0$, $I_2 > 0$ e $I_3 > 0$

( ) $I_1 > 0$, $I_2 = 0$ e $I_3 < 0$

( ) $I_1 > 0$, $I_2 > 0$ e $I_3 < 0$

(X) $I_1 < 0$, $I_2 = 0$ e $I_3 < 0$

( ) $I_1 < 0$, $I_2 < 0$ e $I_3 > 0$

( ) $I_1 > 0$, $I_2 = 0$ e $I_3 > 0$

• **Questão 5** (0.75 ponto) Dado o campo escalar $f(r)$ suave onde $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o campo vetorial $\vec{F} = f(r)\vec{r}$. Assinale a alternativa **incorreta**:

(X) $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$ para qualquer superfície fechada S.

( ) $\oiint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$ para qualquer superfície fechada S.

( ) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para qualquer caminho fechado C.

( ) $\oiint_S \vec{\nabla} f \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla}^2 f dV$ para qualquer superfície fechada S que limita a região V.

( ) $\iiint_V \vec{F} \cdot \vec{F} dV \geq 0$ para toda região limitada V.

• **Questão 6** (0.75 ponto) O potencial φ tal que $\vec{\nabla}\varphi = \vec{i} + z\vec{j} + (y + e^z + ze^z)\,\vec{k}$ é dado por:

( ) $x - z\,(y + e^z) + C$

(X) $x + z\,(y + e^z) + C$

( ) $z\,(x + y + e^z) + C$

( ) $z\,(y + e^z) + C$

( ) $1 + z + y + e^z + ze^z + C$

( ) $x + 2zy + ze^z + C$

• **Questão 7** (0.75 ponto) Seja S a superfície plana limitada pelo retângulo de vértices $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ e $(1,0,0)$ e orientada no sentido positivo do eixo z. Assinale a alternativa que indica o valor de $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde $\vec{F} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

( ) -2

( ) -1

( ) 0

( ) 1

(X) 2

( ) 3

• **Questão 8** (0.75 ponto) Seja C o caminho retangular de vértices $V_1 = (0,0,0)$, $V_2 = (0,1,1)$, $V_3 = (1,1,1)$ e $V_4 = (1,0,0)$ orientado no sentido $V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_4 \to V_1$. Assinale a alternativa que indica o valor de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

( ) -2

( ) -1

(X) 0

( ) 1

( ) 2

( ) 3

• **Questão 9** (2.0 pontos) Obtenha o valor de $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$ onde S é a superfície orientada para fora que limita o hemisfério de raio unitário centrado na origem ($x^2+y^2+z^2=1$, $y\geq 0$) e a porção de plano $y=0$ tal que $x^2+z^2\leq 1$ e $\vec{F}$ é o campo dado por $\vec{F}=xy\vec{i}+(1+y)\vec{j}-zy\vec{k}$.

a) (1.0 ponto) Usando uma parametrização direta da superfície.

b) (1.0 ponto) Usando o Teorema da Divergência.

Solução a) Vamos separar a superfície em duas, $S_1: y=\sqrt{1-x^2-z^2}$ e $S_2: y=0,\ x^2+z^2\leq 1$.

Primeiro calculamos o fluxo em S_1:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}dS\\ &= \iint_D \vec{F}\cdot\vec{\nabla}GdA\end{aligned}$$

onde D é o disco de raio unitário no plano $y=0$, $D: x^2+z^2\leq 1,\ y=0$ e $G=y-\sqrt{1-x^2-z^2}$. Particularmente nesse problema, a superfície S_2 coincide com D. Seguimos calculando:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \iint_D \vec{F}\cdot\vec{\nabla}GdA\\ &= \iint_D \left(xy\vec{i}+(1+y)\vec{j}-zy\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\vec{i}+\vec{j}+\frac{z}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\vec{k}\right)dA\\ &= \iint_D\left(\frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2-z^2}}+(1+y)-\frac{z^2y}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\right)dA.\end{aligned}$$

Tendo em vista que $y=\sqrt{1-x^2-z^2}$, temos:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \iint_D\left(x^2+1+\sqrt{1-x^2-z^2}-z^2\right)dA\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\left(r^2\cos^2(\theta)-r^2\operatorname{sen}^2(\theta)+1+\sqrt{1-r^2}\right)rdrd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\left(r^3\cos(2\theta)+r+r\sqrt{1-r^2}\right)drd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\cos(2\theta)+\frac{r^2}{2}-\frac{1}{3}(\sqrt{1-r^2})^{3/2}\right]_0^1 d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\cos(2\theta)+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)d\theta\\ &= \left[\frac{1}{8}\operatorname{sen}(2\theta)\right]_0^{2\pi}+2\pi\frac{5}{6}=\frac{5\pi}{3}\end{aligned}$$

Agora, calculamos o fluxo em S_2:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}dS\\ &= \iint_D \vec{F}\cdot(-\vec{j})dA\\ &= \iint_D(-1-y)dA\\ &= -\iint_D 1dA=-\pi.\end{aligned}$$

Logo, o fluxo através de S é $\dfrac{5\pi}{3}-\pi=\dfrac{2\pi}{3}$.

Solução b) Calculamos $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=y+1-y=1$ a aplicamos o teorema da divergência:

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}dS\\ &= \iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV\\ &= \iiint_V 1dV\\ &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

- **Questão 10** (2.0 pontos) Seja $\vec{F} = \vec{u} \times \vec{r}$, onde $\vec{u}$ é o vetor constante $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

  a) (1.0 ponto) Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

  b) (1.0 ponto) Use o Teorema de Stokes **ou** uma parametrização direta do caminho C para obter o valor de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde C é o triângulo no plano $z = 2x + 3y$ de vértices $P1(0,0,0)$, $P2(1,0,2)$ e $P3(0,1,3)$ orientado no sentido $P1 \to P2 \to P3 \to P1$.

Solução a) Usamos o item 12 da tabela para calcular o rotacional:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{r}) \\
&= \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{r}) \\
&= \left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u} - \vec{r}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) - \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{r} + \vec{u}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}\right).
\end{aligned}$$

Como $\vec{u}$ é um vetor constante e, portanto, possui todas derivadas nulas, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} &= -\left(u_1\frac{\partial}{\partial x} + u_2\frac{\partial}{\partial y} + u_3\frac{\partial}{\partial z}\right)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + 3\vec{u} \\
&= -\vec{u} + 3\vec{u} = 2\vec{u}.
\end{aligned}$$

Solução b) Usamos o Teorema de Stokes para escrever

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

onde S é a porção do plano $z = 2x + 3y$ limitada pelo triângulo $P_1P_2P_3$. Seguimos resolvendo a integral de superfície:

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S 2\vec{u} \cdot \vec{n} dS \\
&= 2\iint_T \vec{u} \cdot \vec{\nabla} G dA
\end{aligned}$$

onde T é o triângulo no plano xy de vértices $T_1(0,0,0)$, $T_2(1,0,0)$ e $T_3(0,1,0)$, e $G = z - 2x - 3y$. Observe que $\vec{\nabla}G = -2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ está no mesmo sentido de $\vec{n}$. Logo

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 2\iint_T (-2u_1 - 3u_2 + u_3)\, dA \\
&= 2(-2u_1 - 3u_2 + u_3)\iint_T 1 dA \\
&= 2(-2u_1 - 3u_2 + u_3)\frac{1}{2} \\
&= (-2u_1 - 3u_2 + u_3).
\end{aligned}$$