UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2017/1
Prova da área I

1-8	9	10	Total

Nome: Gabarito com respostas finais e alguns comentários sobre a resolução.

Regras Gerais:

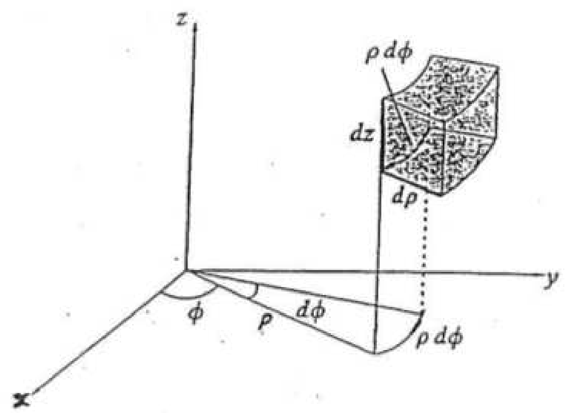
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

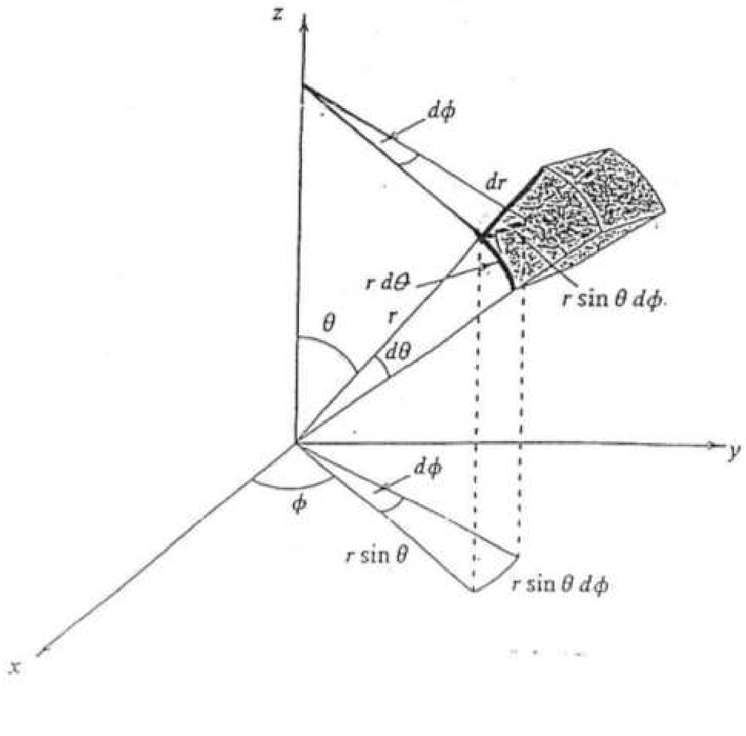
- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

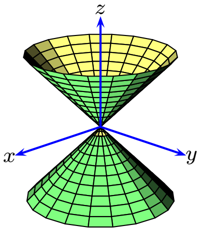
a) Coordenadas cilíndricas : ρ, ϕ, z



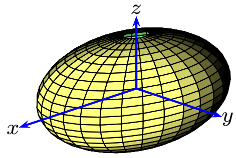
b) Coordenadas esféricas : r, θ, ϕ



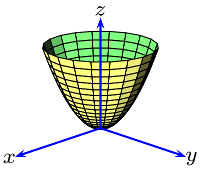
Cone elíptico: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



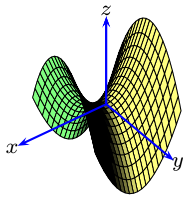
Elipsóide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



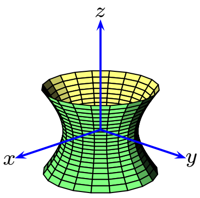
Parabolóide Elíptico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



Parabolóide Hiperbólico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$



Hiperbolóide de uma folha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



Hiperbolóide de duas folhas: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

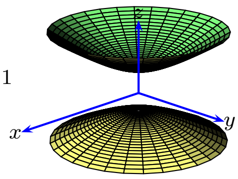


Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$

Algumas fórmulas:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert \dfrac{d\vec{T}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert = \dfrac{\Vert \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \Vert}{\Vert \vec{r}'(t) \Vert^3}$
Torção	$\tau = -\dfrac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \dfrac{\left(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right)\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert \vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t) \Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert \dfrac{d\vec{B}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \dfrac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \dfrac{\Vert \vec{a}\times\vec{v} \Vert}{v} = \dfrac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \dfrac{dv}{dt}$

• **Questão 1** (0.75 ponto) O amendoim-acácia ou tipuana é uma árvore cujos frutos alados são popularmente conhecidos como "sementes de helicóptero". Exausto, depois de duas provas na faculdade, o estudante de engenharia deitou-se sobre o gramado em um dia sem vento para assistir ao suave cair do fruto da tipuana que via rodopiar em sentido horário. A fim de modelar o movimento, considerou que o centro de massa do sistema movia-se verticalmente (na direção e sentido negativo do eixo z) a uma velocidade constante de módulo 20 cm/s, e observou que o fruto fazia uma revolução completa enquanto seu centro de massa caia 5 cm. Considere que a extremidade do fruto oposta ao centro de massa dista 5 cm dele e realiza movimento helicoidal, isto é:

$$x(t) = a\cos(wt), \quad y(t) = b\,\mathrm{sen}(wt), \quad z(t) = ct.$$

Assinale a alternativa que melhor representa os valores de a, b, w e c no sistema de unidades [tempo]=s e [comprimento]=cm:

( ) $a = 5$, $b = -5$, $w = 8\pi$ e $c = 20$.

( ) $a = 5$, $b = -5$, $w = 8\pi$ e $c = -20$.

( ) $a = 5$, $b = 5$, $w = 8\pi$ e $c = 20$.

(X) $a = 5$, $b = 5$, $w = 8\pi$ e $c = -20$.

( ) Como o movimento é levogiro, nenhuma das alternativas (a)-(d) o descreve corretamente.

( ) Como o movimento é dextrogiro, nenhuma das alternativas (a)-(d) o descreve corretamente.

Como o fruto está caindo, temos que $c < 0$. Observamos também que o movimento é levógiro, isto é, o sentido de rotação é horário quando visto de baixo e anti-horário quando visto de cima com $c < 0$, logo $b > 0$ (visto que $a > 0$ em todas as alternativas).

No caso de o sentido ser anti-horário, o movimento é dextrogiro e $b < 0$.

• **Questão 2** (0.75 ponto) Considere a espiral dada por

$$x(t) = ae^{bt}\cos(t), \quad y(t) = ae^{bt}\,\mathrm{sen}(t), \quad z(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

onde $a > 0$ e b são constantes. Assinale a alternativa que representa a curvatura em função do parâmetro t. Dica: Ao invés de tentar obter uma expressão para $\kappa(t)$, interprete a curva e analise aspectos qualitativos como casos particulares conhecidos e comportamento esperado com os parâmetros.

( ) $\dfrac{ae^{-bt}}{\sqrt{1+b^2}}$.

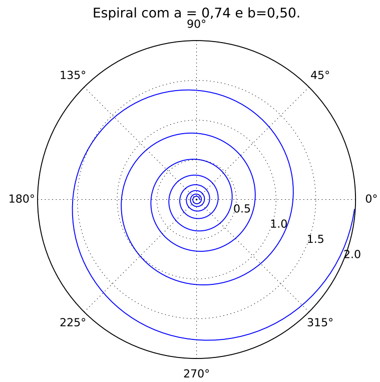
( ) $\dfrac{e^{bt}}{a\sqrt{1+b^2}}$.

( ) $\dfrac{ae^{-bt}}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

( ) $\dfrac{ae^{bt}}{\sqrt{1+b^2}}$.

(X) $\dfrac{e^{-bt}}{a\sqrt{1+b^2}}$.

( ) $\dfrac{ae^{bt}}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



Primeiro, observamos que o caso particular $b = 0$ recai na circunferência de raio a, cuja curvatura é $1/a$. Assim temos apenas duas opções: $\dfrac{e^{-bt}}{a\sqrt{1+b^2}}$ e $\dfrac{e^{bt}}{a\sqrt{1+b^2}}$. Interpretando a espiral (ver gráfico), fica claro que a curvatura decresce com a distância até a origem dada por e^{bt}, logo a resposta correta só pode ser $\dfrac{e^{-bt}}{a\sqrt{1+b^2}}$.

• **Questão 3** (0.75 ponto) Considere os campos $\vec{F} = ay\vec{i} + bx\vec{j} + z\vec{k}$ e $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. O campo $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{r}\right)$ é dado por:

(X) $(b - a)z$.

( ) $(1 + b)x + (b - a)z$.

( ) $(a + b)x$.

( ) $(1 + b)y + (b - a)z$.

( ) $(1 + b)z$.

( ) Nenhuma das anteriores.

• **Questão 4** (0.75 ponto) Considere os mesmos campos da questão anterior, isto é, $\vec{F} = ay\vec{i} + bx\vec{j} + z\vec{k}$ e $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. O campo $\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{r}\right)$ é dado por:

( ) $ay\vec{i} + bx\vec{j} + 2z\vec{k}$.

( ) $ax\vec{i} + by\vec{j} + az^2\vec{k}$.

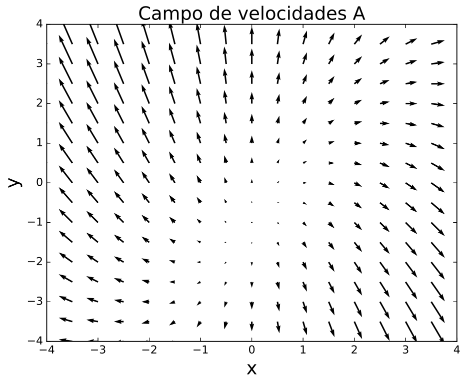
( ) $(a + b)y\vec{i} + bz\vec{j} + 2x\vec{k}$.

( ) $2z\vec{i} + (a + b)x\vec{j} + az^2\vec{k}$.

(X) $(a + b)y\vec{i} + (a + b)x\vec{j} + 2z\vec{k}$.

( ) Nenhuma das anteriores.

• **Questão 5** (0.75 ponto) Considere o campo de velocidades $\vec{v} = v_1(x,y)\vec{i} + v_2(x,y)\vec{j}$ representado no gráfico ao lado. Assinale a alternativa correta:



( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} < 0$ em todos os pontos.

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} > 0$ em todos os pontos.

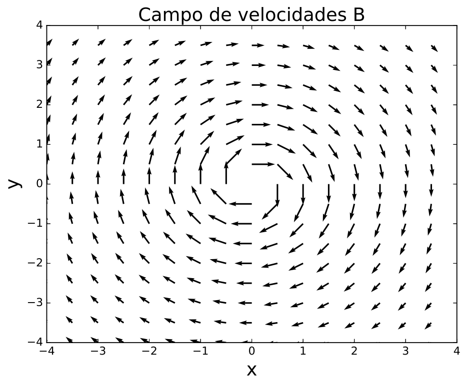
( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} > 0$ em todos os pontos.

(X) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} < 0$ em todos os pontos.

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} > 0$ em todos os pontos.

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} < 0$ em todos os pontos.

• **Questão 6** (0.75 ponto) Considere o campo de velocidades $\vec{v} = v_1(x,y)\vec{i} + v_2(x,y)\vec{j}$ representado no gráfico ao lado. Assinale a alternativa correta:



( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} < 0$ em todos os pontos.

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} < 0$ em todos os pontos.

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} > 0$ em todos os pontos.

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} > 0$ em todos os pontos.

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} < 0$ em todos os pontos.

(X) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} > 0$ em todos os pontos.

• **Questão 7** (0.75 ponto) Considere o campo dado por $\vec{F} = ye^z\vec{i} - x\cos(z)\vec{j} + \cos(xyz)\vec{k}$ e caminho C que contorna no sentido ***horário*** a porção do plano xy limitada pelos eixos ordenados, a reta $x = 2$, a reta $y = 2$ e a hipérbole $xy = 1$. Assinale a alternativa que indica valor de $W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Dica: Use o Teorema de Stokes.

( ) $2\ln(4)$

(X) $2 + 4\ln(2)$

( ) $1 - \ln(4)$

( ) $-2 - 4\ln(2)$

( ) $-2\ln(4)$

( ) Nenhuma das anteriores.

Ver questão 5 da lista 0.

• **Questão 8** (0.75 ponto) Considere o campo dado por $\vec{F} = xz\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$ e caminho C dado pelo arco de parábola $y = x^2$ no plano xy que liga o ponto $P_1 = (0,0,0)$ até o ponto $P_2 = (2,4,0)$ no sentido $P_1 \to P_2$. Assinale a alternativa que indica valor de $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

( ) $\frac{106}{15}$

( ) $\frac{17}{3}$

(X) $\frac{64}{5}$

( ) $\frac{74}{5}$

( ) 0

( ) Nenhuma das anteriores.

- **Questão 9** (2.0 pontos) Considere os campos $\vec{F} = y\cos(xy)\vec{i} + (x\cos(xy) + ze^{yz})\,\vec{j} + (ye^{yz} + 1)\,\vec{k}$ e $\vec{G} = y\vec{k}$.

  a. (1.0 ponto) Encontre um potencial para o campo conservativo $\vec{F}$.

  b. (1.0 ponto) Encontre um caminho fechado C tal que $\oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r} \neq 0$. Dica: Inspecione o rotacional de $\vec{G}$.

  Item a. $\phi(x, y, z) = \mathrm{sen}(xy) + e^{yz} + z + C$, onde C é uma constante.
  Item b. $\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{i}$, assim escolha um caminho C fechado que limita a região S no plano yz (cuja normal é $\pm\vec{i}$), temos:

$$W = \oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS = \int_S \vec{i} \cdot \vec{\eta} dS = \pm \int_S dS = \pm \text{ área de S.}$$

Escolha S de área não nula e qualquer orientação.

• **Questão 10** (2.0 pontos) Considere S a superfície orientada para fora que contorna o sólido V limitado superiormente pelo plano $z = 1$ e inferiormente pela superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$ e o campo $\vec{F} = x\vec{i} + z\vec{k}$. Calcule o valor do fluxo $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ conforme solicitado.

a. (1.0 ponto) Via parametrização direta da superfície.

b. (1.0 ponto) Via Teorema da Divergência.

Item a. Escreva $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ onde Φ_1 é a lateral e Φ_2 é o topo.

$$\Phi_1 = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS = \pm \iint_A \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA$$

onde $G(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\vec{\nabla} G = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \vec{k}$, assim

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G = -\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + z$$

Convertendo para coordenadas cilíndricas, temos:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-\frac{\rho^2\cos^2(\theta)}{\rho} + z\right)\rho d\rho d\theta = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-\frac{\rho^2\cos^2(\theta)}{\rho} + \rho\right)\rho d\rho d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\right) d\rho d\theta = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}^2(\theta) d\rho d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\theta) d\theta = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta = -\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

$$\Phi_2 = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{k} dS = \iint_S \vec{F} z dS = \iint_S \vec{F} dS = \text{ área de S } = \pi$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$$

Item b. Observe que $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2$, assim

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS = \iiint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = 2\iiint_S dV = 2 \times (\text{volume de V}) = \frac{2}{3}\pi$$