UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2017/2
Prova da área I

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert \frac{d\vec{T}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert = \frac{\Vert \vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert \vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t))\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert \vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\vert\tau\vert = \left\Vert \frac{d\vec{B}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert \vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N} \end{aligned}$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere que uma partícula descreva a trajetória dada por

$$x(t) = t, \quad y(t) = e^t, \quad z(t) = t^2, \; t \in \mathbb{R}$$

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, as componentes tangencial e normal da aceleração no instante $t = 0$.

(X) $a_T = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ( ) $a_N = \frac{\sqrt{2}}{2}$

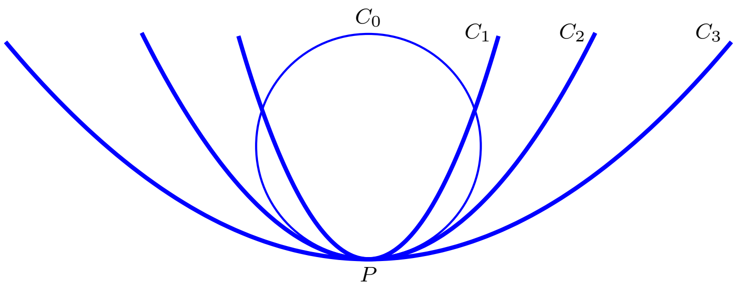
( ) $a_T = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ( ) $a_N = \frac{\sqrt{2}}{4}$

( ) $a_T = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (X) $a_N = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

( ) $a_T = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ( ) $a_N = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

( ) $a_T = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ( ) $a_N = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere a figura formada por 4 curvas: C_0, C_1, C_2 e C_3. Sabe-se que C_0 é um círculo de raio 2 centrado no centro de curvatura da curva C_2 relativo ao ponto P. Também sabe-se que todas as curvas passam pelo ponto P. Definimos as curvaturas no ponto P para as curvas C_0, C_1, C_2 e C_3 por κ_0, κ_1, κ_2 e κ_3, respectivamente. Marque na primeira coluna o valor de κ_2 e na segunda assinale a alternativa com a afirmação correta.



( ) $\kappa_2 = \frac{1}{4}$ ( ) $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3$

(X) $\kappa_2 = \frac{1}{2}$ ( ) $\kappa_3 < \kappa_1 < \kappa_2$

( ) $\kappa_2 = 1$ ( ) $\kappa_2 < \kappa_1 < \kappa_3$

( ) $\kappa_2 = 2$ ( ) $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$

( ) $\kappa_2 = 4$ (X) $\kappa_1 > \kappa_2 > \kappa_3$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere a seguinte expressão

$$\vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})\right) + \vec{F} \times \vec{\nabla}^2 \vec{F}$$

Na primeira coluna, assinale a alternativa que apresenta uma forma simplificada da mesma expressão e, na segunda, o valor da expressão para o campo $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$.

( ) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \times \vec{F}$ ( ) $2(x^2 - y^2)\vec{i} + 2(x^2 - y^2)\vec{j} + 2(x^2 - y^2)\vec{k}$

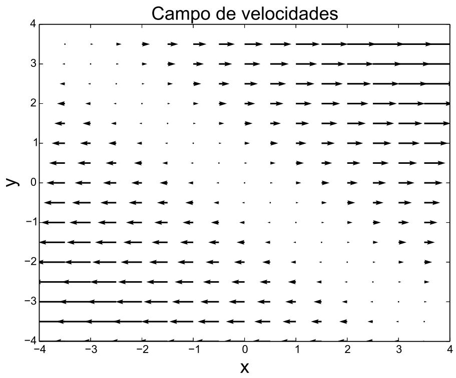
( ) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$ ( ) $(y^2 - 2)\vec{i} + (2 - x^2)\vec{j} + 2\vec{k}$

(X) $\vec{F} \times \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$ ( ) $(2 - y^2)\vec{i} + (2 - x^2)\vec{j} + 2(x^2 + y^2)\vec{k}$

( ) $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ (X) $2(x^2 - y^2)\vec{k}$

( ) $(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})(\vec{\nabla} \times \vec{F})$ ( ) $(y^2 - x^2)\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j} + 2(x^2 + y^2)\vec{k}$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere o campo $\vec{F} = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}$ dado no gráfico ao lado. Em cada coluna assinale uma alternativa correta.



( ) O divergente é positivo somente na região $x \geq y$.

( ) O divergente não existe em toda linha $x = -y$.

( ) O divergente é nulo em todos os pontos.

( ) O divergente é negativo em todos os pontos.

(X) O divergente é positivo em todos os pontos.

( ) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} \geq 0$ em todos os pontos.

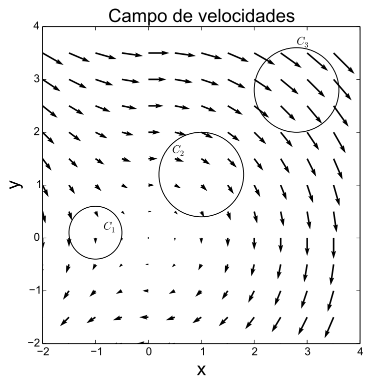
(X) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} \leq 0$ em todos os pontos.

( ) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ em todos os pontos.

( ) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} \geq 0$ somente na região $x > y$.

( ) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} \geq 0$ somente na região $x < y$.

• **Questão 5** (1.0 ponto) Considere o campo de velocidades e as três circunferências, C_1, C_2 e C_3, orientadas positivamente no sentido horário. Definimos



$$I_1 = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad I_2 = \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{e} \quad I_3 = \oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Em cada coluna assinale uma alternativa correta.

( ) $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, e $I_3 > 0$.

( ) $I_1 > 0$, $I_2 < 0$, e $I_3 < 0$.

( ) $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, e $I_3 < 0$.

(X) $I_1 < 0$, $I_2 > 0$, e $I_3 > 0$.

( ) $I_1 < 0$, $I_2 < 0$, e $I_3 > 0$.

( ) $|I_1| \geq |I_3| \geq |I_2|$.

( ) $|I_1| \geq |I_2| \geq |I_3|$.

( ) $|I_2| \geq |I_3| \geq |I_1|$.

(X) $|I_3| \geq |I_2| \geq |I_1|$.

( ) $|I_2| \geq |I_1| \geq |I_3|$.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Sejam $\vec{F} = (e^{-(r-2)} - e^{(r-2)})\hat{r}$ e as três esferas S_1, S_2 e S_3, com raios 1, 2 e 3, respectivamente, todas orientadas para fora. Definimos

$$I_1 = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS, \quad I_2 = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad \text{e} \quad I_3 = \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Em cada coluna assinale uma alternativa correta.

(X) $I_1 > 0$, $I_2 = 0$, e $I_3 < 0$.

( ) $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, e $I_3 < 0$.

( ) $I_1 < 0$, $I_2 = 0$, e $I_3 > 0$.

( ) $I_1 < 0$, $I_2 < 0$, e $I_3 > 0$.

( ) $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, e $I_3 > 0$.

( ) $|I_1| = |I_3| \leq |I_2|$.

(X) $|I_3| \geq |I_1| \geq |I_2| = 0$.

( ) $|I_3| = |I_1| \geq |I_2| > 0$.

( ) $|I_1| \leq |I_2| \leq |I_3|$.

( ) $|I_1| = |I_2| \geq |I_3|$.

• **Questão 7** (2.0) Considere a região V por um lado pela superfície S_1 de equação

$$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

e por outro pelo plano $x = 0$ e o campo $\vec{F} = (x^3 + 1)\vec{i} + (y^3 + z)\vec{j} + (z^3 + x)\vec{k}$.

(a) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S que limita V orientada para fora.

(b) Calcule o valor de $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$. Dica: use o resultado do item a.

Solução: a) Observe que $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$ e a superfície é um hemisfério de raio 1 e $x \geq 0$. Logo

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^1 3\rho^2 \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) d\rho d\phi d\theta \\
&= \frac{6\pi}{5}
\end{aligned}$$

Solução: b) O teorema da divergência nos dá

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

onde D é o disco $y^2 + z^2 \leq 1$ no plano $x = 0$. Temos, pelo item a)

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \frac{6\pi}{5}.$$

Também,

$$\iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (-x^3 - 1) dA = -\iint_D 1 dA = -\pi.$$

Logo,

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \frac{6\pi}{5} + \pi = \frac{11\pi}{5}.$$

• **Questão 8** (2.0 pontos) Considere a circunferência C que limita a superfície aberta de equação

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \; 0 \leq z \leq 2$$

orientada no sentido anti-horário (em relação ao eixo z) e o campo $\vec{F} = z^2\vec{i} + 2x\vec{j} - y^3\vec{k}$. Faça o que se pede:

(a) Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{F}$ através do disco de equação

$$x^2 + y^2 \leq 2^2, \; z = 2.$$

(b) Calcule o valor de

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Solução: a) Temos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & 2x & -y^3 \end{vmatrix} = -3y^2\vec{i} + 2z\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Seja D o disco no plano $z = 2$, $x^2 + y^2 \leq 4$. Definimos $G = z - 2$ e temos $\vec{\nabla}G = \vec{k}$. Assim,

$$\iint_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D 2dA = 8\pi.$$

Solução: b) Pelo teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 8\pi.$$