UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2018/1
Prova da área I

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ________________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = G \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - F \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$

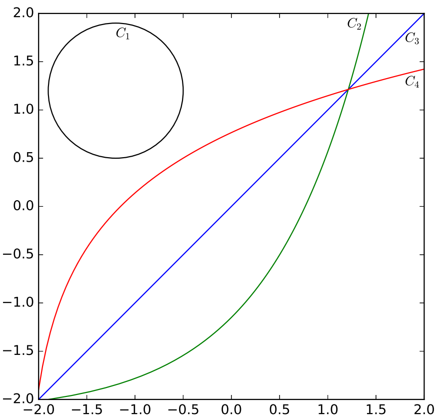
Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\lVert \frac{d\vec{T}}{ds} \right\rVert = \left\lVert \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\rVert = \frac{\lVert \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \rVert}{\lVert \vec{r}'(t) \rVert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\lVert \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert \frac{d\vec{B}}{ds} \right\rVert = \left\lVert \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\rVert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\lVert \vec{a} \times \vec{v} \rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere as curvas C_1, C_2, C_3 e C_4, com curvaturas κ_1, κ_2, κ_3 e κ_4, respectivamente. A curva C_3 é dada pela equação $y = x$ e as curvas C_2 e C_4 são simétricas com respeito a curva C_3. Na primeira coluna, marque o item que apresenta todas as curvas com curvatura constante e, na segunda, a magnitude das curvaturas nos pontos de encontro entre as curvas C_2, C_3 e C_4.



Curvas com curvatura constante

( ) Somente C_3.

(X) Somente C_3 e C_1.

( ) Somente C_3 e C_2.

( ) Somente C_1 e C_4.

( ) Somente C_1 e C_2.

( ) Somente C_2 e C_4.

Curvaturas nos pontos de encontro de C_2, C_3 e C_4

( ) $\kappa_2 > \kappa_3 > \kappa_4$.

( ) $\kappa_2 < \kappa_3 < \kappa_4$.

( ) $\kappa_3 < \kappa_2 < \kappa_4$.

(X) $\kappa_2 = \kappa_4 > \kappa_3$.

( ) $\kappa_2 = \kappa_4 < \kappa_3$.

( ) $\kappa_2 < \kappa_4 = \kappa_3$.

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere três pontos sobre a curva ao lado, nomeados de P_1, P_2 e P_3, dispostos respectivamente no sentido positivo da curva, e em cada ponto o esboço do triedro de Frenet-Serret. Considere um partícula se deslocando sobre a curva no sentido positivo com velocidade escalar constante de 2 m/s. Marque na primeira coluna o correto item sobre a aceleração da partícula e, na segunda, a correta afirmação sobre o sinal da torção em cada pedaço da curva.

Aceleração

( ) A aceleração é o vetor nulo.

( ) A componente normal da aceleração é nula.

(X) A componente tangencial da aceleração é nula.

( ) A norma do vetor aceleração é zero em todos os pontos.

( ) A norma do vetor aceleração tem derivada zero em todos os pontos.

Torção

(X) A torção é sempre positiva.

( ) A torção é sempre negativa.

( ) A torção é positiva entre P_1 e P_2 e negativa entre P_2 e P_3.

( ) A torção é negativa entre P_1 e P_2 e positiva entre P_2 e P_3.

( ) A torção é zero nos pontos P_1, P_2 e P_3.

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere os campos dados por $\vec{F} = x\vec{i} + xe^y\vec{j} + xyz\vec{k}$, $\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ e S a esfera unitária centrada na origem orientada para dentro. Marque na primeira coluna o campo $\vec{G}$ e, na segunda, o valor de $\iint_S \vec{G} \cdot \vec{n} dS$.

(X) $xz\vec{i} - yz\vec{j} + e^y\vec{k}$

( ) $yz\vec{i} - xz\vec{j} + e^y\vec{k}$

( ) $-xz\vec{i} + yz\vec{j} - e^y\vec{k}$

( ) $e^y\vec{i} - z\vec{j} + z\vec{k}$

( ) $e^y\vec{i} + xz\vec{j} - yz\vec{k}$

(X) 0

( ) 1

( ) -1

( ) 2

( ) -2

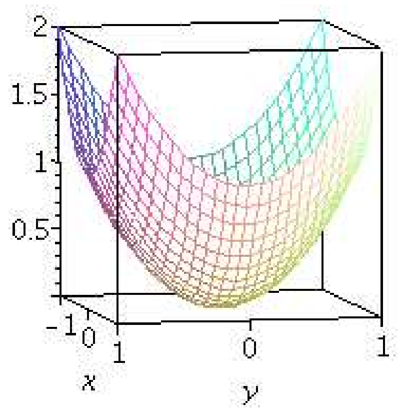
• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere a superfície S aberta dada na figura ao lado, limitada pelo curva C. A superfície S é dada por uma função $z = f(x, y)$, tem simetria axial em relação ao eixo z e o domínio de f é $[-1, 1] \times [-1, 1]$. A superfície S está orientada no sentido de $-\vec{k}$ e a curva C está positivamente orientada com respeito a S. Considere o campo $\vec{F} = y^2\vec{k}$ e as seguintes integrais:

$$A = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e

$$B = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Marque na primeira coluna o correto sinal de A e, na segunda, o correto sinal de B.



Sinal de A

( ) $A > 0$.
(X) $A = 0$.
( ) $A < 0$.
( ) Embora $A \neq 0$, não é possível saber seu sinal.
( ) Não há informações suficientes para estimar A.

Sinal de B

( ) $B > 0$.
( ) $B = 0$.
(X) $B < 0$.
( ) Embora $B \neq 0$, não é possível saber seu sinal.
( ) Não há informações suficientes para estimar B.

• **Questão 5** (1.0 ponto) Dado o campo conservativo $\vec{F} = (2x + yz)\vec{i} + (2y + xz)\vec{j} + (2z + xy)\vec{k}$, marque na primeira coluna o pontecial $\phi(x, y, z)$ e, na segunda, o valor $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a curva $\vec{r} = \cos(2\pi t)\vec{i} + \text{sen}(2\pi t)\vec{j} + t^2\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

(X) $xyz + x^2 + y^2 + z^2$.
( ) $x^2 + y^2 + z^2$.
( ) xyz.
( ) $xyz + xy + yz + zx$.
( ) $xy + yz + zx$.

( ) 0.
(X) 1.
( ) 2.
( ) 3.
( ) 4.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Considere o campo vetorial $\vec{F} = \vec{j} + z\vec{k}$ e a superfície S formada pelas seis faces do cubo de lado 4 ($x = \pm 2$, $y = \pm 2$ e $z = \pm 2$), orientada para fora. Chamamos de S_1 apenas a face $x = 2$ do cubo, orientado no sentido de $\vec{i}$. Na primeira coluna marque o item que corresponde $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ e, na segunda, $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

(X) 0
( ) 2
( ) 4
( ) 6
( ) 8

( ) 4
( ) 16
( ) 32
( ) 48
(X) 64

• **Questão 7** (2.0 ponto) Calcule o ponto onde a curva $y = e^x$ tem curvatura máxima.

Solução: Começamos calculando a função curvatura, usando a parametrização $\vec{r}(t) = t\vec{i} + e^t\vec{j}$:

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \vec{i} + e^t\vec{j}, \\
\|r'(t)\| &= \sqrt{1+e^{2t}}, \\
\vec{r}''(t) &= e^t\vec{j}, \\
\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \end{vmatrix} = e^t\vec{k}, \\
\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| &= e^t, \\
\kappa(t) &= \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular o ponto de máximo de $\kappa(t)$, procurando t tal que $\kappa'(t) = 0$.

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{(1+e^{2t})^{3/2}e^t - e^t\frac{3}{2}(1+e^{2t})^{1/2}2e^{2t}}{(1+e^{2t})^3} \\
&= \frac{(1+e^{2t})^{1/2}}{(1+e^{2t})^3}\left(1-2e^{2t}\right)e^t = 0
\end{aligned}$$

Assim,

$$1 - 2e^{2t} = 0,$$

levando a

$$e^{2t} = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

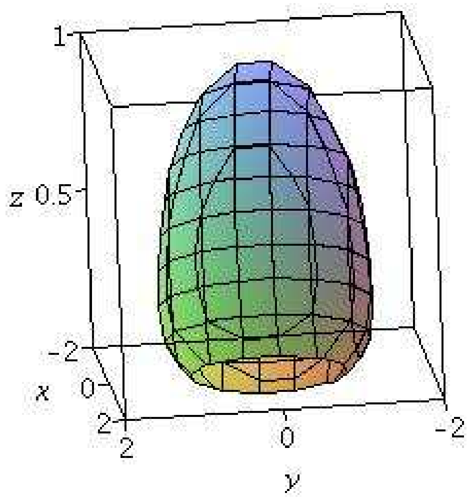
$$t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

• **Questão 8** (2.0 ponto) Considere a superfície S aberta dada na figura ao lado, orientada no sentido côncavo-convexo. Seja C a curva no plano $z = 0$ que limita S. A equação da superfície S é dada por

$$z^2 + z^3 + e^{-10z} = 2 - x^2 - y^2.$$

Considere o campo $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$. Calcule

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$



Dica: Use o teorema de Stokes.

Solução: Pelo teorema de Stokes, temos:

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

Aqui, C é o corte da superfície S com o plano $z = 0$, isto é,

$$0^2 + 0^3 + e^0 = 2 - x^2 - y^2.$$

Logo, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Também, D é o disco no plano $z = 0$, com limites satisfazendo $x^2 + y^2 \leq 1$. Vamos usar a última expressão do lado direito para calcular o fluxo através da superfície:

$$\iint_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Assim, calculamos o ratocional do campo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} = 2\vec{k}.$$

Finalmente, temos

$$\iint_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D 2\vec{k} \cdot \vec{k} dA = 2 \iint_D 1 dA = 2\pi.$$