UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2018/1
Prova da área I

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$

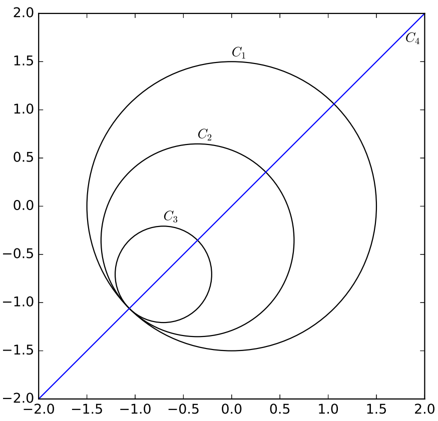
Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t))\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere as curvas C_1, C_2, C_3 e C_4, com curvaturas κ_1, κ_2, κ_3 e κ_4, respectivamente. Todas as curvas são circunferências ou reta. Na primeira coluna, marque o item que apresenta todas as curvas com curvatura constante e, na segunda, a magnitude das curvaturas no ponto de encontro entre todas as curvas.



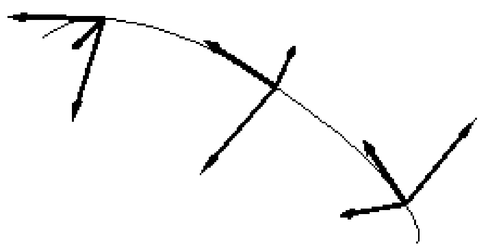
Curvas com curvatura constante

- ( ) Somente C_4.
- ( ) Somente C_4 e C_1.
- ( ) Somente C_4 e C_2.
- ( ) Somente C_4, C_3 e C_2.
- ( ) Somente C_4, C_2 e C_1.
- (X) C_4, C_3, C_2 e C_1.

Curvatura no ponto de encontro de todas as curvas

- ( ) $\kappa_1 > \kappa_2 > \kappa_3 > \kappa_4$.
- ( ) $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \kappa_4$.
- (X) $\kappa_4 < \kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3$.
- ( ) $\kappa_4 > \kappa_1 > \kappa_2 > \kappa_3$.
- ( ) $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 > \kappa_4$.
- ( ) $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 < \kappa_4$.

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere três pontos sobre a curva ao lado, nomeados de P_1, P_2 e P_3, dispostos respectivamente no sentido positivo da curva, e em cada ponto o esboço do triedro de Frenet-Serret. Considere um partícula se deslocando sobre a curva no sentido positivo com velocidade escalar estritamente crescente. Marque na primeira coluna o correto item sobre a aceleração da partícula e, na segunda, a correta afirmação sobre o sinal da torção em cada pedaço da curva.



Aceleração

- ( ) A componente normal da aceleração é negativa.
- ( ) A componente tangencial da aceleração é negativa.
- (X) A componente tangencial da aceleração é positiva.
- ( ) A norma do vetor aceleração é constante em todos os pontos.
- ( ) A norma do vetor aceleração tem derivada zero em todos os pontos.

Torção

- ( ) A torção é sempre positiva.
- (X) A torção é sempre negativa.
- ( ) A torção é positiva entre P_1 e P_2 e negativa entre P_2 e P_3.
- ( ) A torção é negativa entre P_1 e P_2 e positiva entre P_2 e P_3.
- ( ) A torção é zero nos pontos P_1, P_2 e P_3.

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere os campos dados por $\vec{F} = x\vec{i} + xe^y\vec{j} + xyz\vec{k}$, $\vec{G} = \vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{F}\right)$ e C a circunferência de raio 2 no plano xy centrada na origem. Marque na primeira coluna o campo $\vec{G}\cdot\vec{i}$ e, na segunda, o valor de $\int_C \vec{G}\cdot d\vec{r}$.

- (X) $2x\left(1 + e^{2y} + y^2z^2\right)$
- ( ) $2\left(1 + e^{2y} + y^2z^2\right)$
- ( ) $2y\left(e^{2y} + y^2z\right)$
- ( ) $2z\left(1 + 2e^{y} + y^2z^2\right)$
- ( ) $2y\left(x + 2e^{2y} + yz^2\right)$

- (X) 0
- ( ) 1
- ( ) -1
- ( ) 2
- ( ) -2

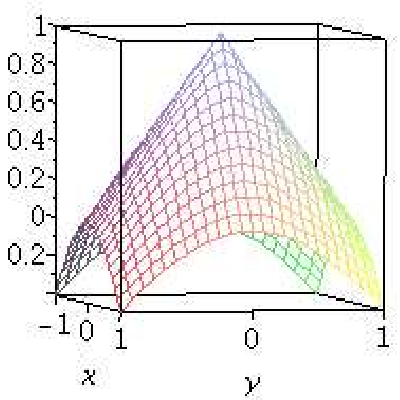
• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere a superfície S aberta dada na figura ao lado, limitada pelo curva C. A superfície S é dada por uma função $z = f(x, y)$, tem simetria axial em relação ao eixo z e o domínio de f é $[-1, 1] \times [-1, 1]$. A superfície S está orientada no sentido de $\vec{k}$ e a curva C está positivamente orientada com respeito a S. Considere o campo $\vec{F} = (x + 1)\vec{j} + 10\vec{k}$ e as seguintes integrais:

$$A = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e

$$B = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Marque na primeira coluna o correto sinal de A e, na segunda, o correto sinal de B.



Sinal de A

(X) $A > 0$.
( ) $A = 0$.
( ) $A < 0$.
( ) Embora $A \neq 0$, não é possível saber seu sinal.
( ) Não há informações suficientes para estimar A.

Sinal de B

(X) $B > 0$.
( ) $B = 0$.
( ) $B < 0$.
( ) Embora $B \neq 0$, não é possível saber seu sinal.
( ) Não há informações suficientes para estimar B.

• **Questão 5** (1.0 ponto) Dado o campo conservativo $\vec{F} = (\cos(x) + 2xy^2z^2)\vec{i} + (2x^2yz^2)\vec{j} + (2x^2y^2z)\vec{k}$, marque na primeira coluna o pontecial $\phi(x, y, z)$ e, na segunda, o valor $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a curva $\vec{r} = \cos(\pi t)\vec{i} + \mathrm{sen}(\pi t)\vec{j} + 2t^2\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

(X) $\mathrm{sen}(x) + x^2y^2z^2$.
( ) $\cos(x) + x^2y^2z^2$.
( ) $x^2y^2z^2$.
( ) $\mathrm{sen}(x) + x^2 + y^2 + z^2$.
( ) $\mathrm{sen}(x)x^2y^2z^2$.

( ) 0.
(X) $-2\,\mathrm{sen}(1)$.
( ) $2\,\mathrm{sen}(1)$.
( ) $2\,\mathrm{sen}(1) + 2$.
( ) $-2\,\mathrm{sen}(1) + 2$.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Considere o campo vetorial $\vec{F} = x\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ e a superfície S formada pelas seis faces do cubo de lado 8 ($x = \pm 4$, $y = \pm 4$ e $z = \pm 4$), orientada para fora. Chamamos de S_1 apenas a face $y = -4$ do cubo, orientado no sentido de $-\vec{j}$. Na primeira coluna marque o item que corresponde $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ e, na segunda, $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

( ) 0
(X) -64
( ) 64
( ) -512
( ) 512

( ) 64
( ) 512
(X) 1024
( ) 2048
( ) 4096

• **Questão 7** (2.0 ponto) Calcule o valor de c para que a Hélice

$$\vec{r}(t) = a\cos(wt)\vec{i} + a\,\mathrm{sen}(wt)\vec{j} + ct\vec{k}, \qquad a > 0.$$

tenha torção máxima.

Solução: Começamos calculando a torção:

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= -aw\,\mathrm{sen}(wt)\vec{i} + aw\cos(wt)\vec{j} + c\vec{k},\\
\vec{r}''(t) &= -aw^2\cos(wt)\vec{i} - aw^2\,\mathrm{sen}(wt)\vec{j},\\
\vec{r}'''(t) &= aw^3\,\mathrm{sen}(wt)\vec{i} - aw^3\cos(wt)\vec{j},\\
\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -aw\,\mathrm{sen}(wt) & aw\cos(wt) & c\\ -aw^2\cos(wt) & -aw^2\,\mathrm{sen}(wt) & 0 \end{vmatrix} = aw^2c\,\mathrm{sen}(wt)\vec{i} - aw^2c\cos(wt)\vec{j} + a^2w^3\vec{k},\\
\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\| &= \sqrt{a^2w^4c^2 + a^4w^6} = aw^2\sqrt{c^2+a^2w^2},\\
\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\cdot\vec{r}'''(t) &= a^2w^5c\\
\tau &= \frac{wc}{c^2+a^2w^2}
\end{aligned}$$

Agora, vamos derivar com respeito a c:

$$\frac{d\tau}{dc} = \frac{w(c^2+a^2w^2) - 2wc^2}{(c^2+a^2w^2)^2} = \frac{w(-c^2+a^2w^2)}{(c^2+a^2w^2)^2} = 0.$$

Isso implica em

$$-c^2 + a^2w^2 = 0,$$

ou seja,

$$c = \pm aw.$$

Observe que a torção pode ser negativa ou positiva, dependendo do sinal do produto wc. Como queremos a torção máxima, estamos interessados nos valores de wc positivos. Também, quando $c = 0$ temos $\tau = 0$ e, $\lim_{c\to\infty}\tau = 0$, o que indica que τ passa por um máximo e um mínimo. Concluímos que o máximo acontece para o seguinte valor de c:

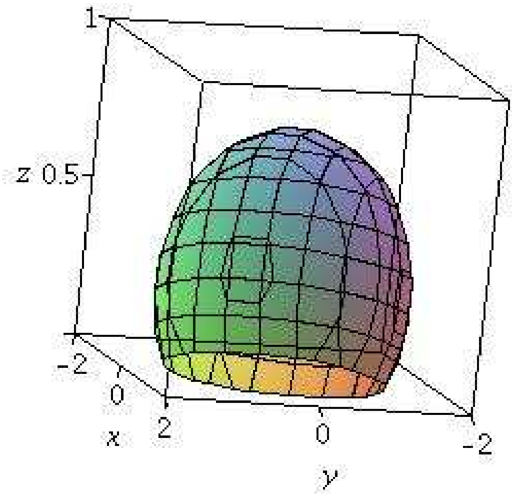
$$c = aw.$$

• **Questão 8** (2.0 ponto) Considere a superfície S aberta dada na figura ao lado, orientada no sentido côncavo-convexo. Seja C a curva no plano $z = 0$ que limita S. A equação da superfície S é dada por

$$z^2 + 5z^3 + e^{-5z} = 3 - x^2 - y^2.$$

Considere o campo $\vec{F} = -(y+z)\vec{i} + x\vec{j} + z^2 x\vec{k}$. Calcule

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$



Dica: Use o teorema de Stokes.

Solução: Pelo teorema de Stokes, temos:

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

Aqui, C é o corte da superfície S com o plano $z = 0$, isto é,

$$0^2 + 5 \cdot 0^3 + e^0 = 3 - x^2 - y^2.$$

Logo, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 2$. Também, D é o disco no plano $z = 0$, com limites satisfazendo $x^2 + y^2 \leq 2$. Vamos usar a última expressão do lado direito para calcular o fluxo através da superfície:

$$\iint_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Assim, calculamos o ratocional do campo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y-z & x & z^2 x \end{vmatrix} = (-1 - z^2)\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Finalmente, temos

$$\iint_D \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D ((-1 - z^2)\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot \vec{k} dA = 2 \iint_D 1 dA = 4\pi.$$