UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2018/1
Prova da área I

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + +\vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$

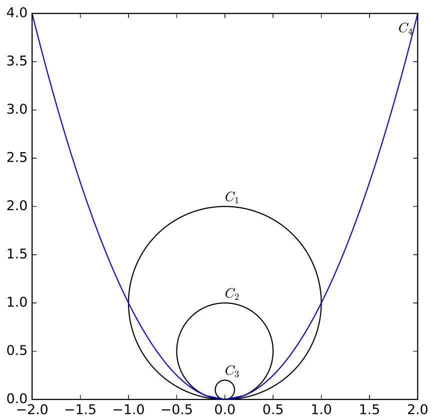
Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t))\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{array}{cclcc}
\frac{d\vec{T}}{ds} & = & & \kappa\vec{N} & \\
\frac{d\vec{N}}{ds} & = & -\kappa\vec{T} & & +\tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} & = & & -\tau\vec{N} &
\end{array}
$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere as curvas C_1, C_2, C_3 e C_4, com curvaturas κ_1, κ_2, κ_3 e κ_4, respectivamente. Sabe-se que a curva C_2 e C_4 possuem o mesmo raio de curvatura no ponto $(0, 0)$. Na primeira coluna, marque o item que apresenta todas as curvas com curvatura constante e, na segunda, a magnitude das curvaturas no ponto de encontro entre todas as curvas.



Curvas com curvatura constante

( ) Somente C_2.

( ) Somente C_2 e C_3.

( ) Somente C_2 e C_1.

(X) Somente C_2, C_3 e C_1.

( ) Somente C_4, C_2 e C_1.

( ) C_4, C_3, C_2 e C_1.

Curvatura no ponto de encontro de todas as curvas

( ) $\kappa_1 > \kappa_2 > \kappa_3 > \kappa_4$.

( ) $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \kappa_4$.

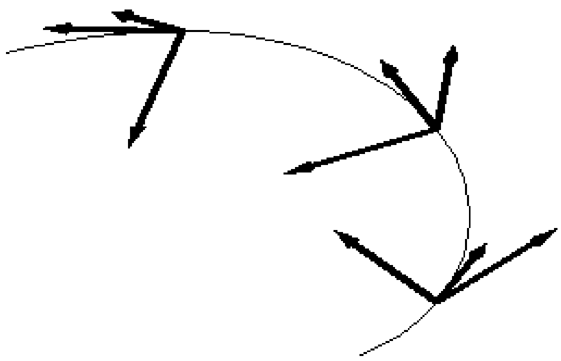
( ) $\kappa_4 < \kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3$.

(X) $\kappa_1 < \kappa 2 = \kappa_4 < \kappa_3$.

( ) $\kappa_3 < \kappa 2 = \kappa_4 < \kappa_1$.

( ) $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4$.

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere três pontos sobre a curva ao lado, nomeados de P_1, P_2 e P_3, dispostos respectivamente no sentido positivo da curva, e em cada ponto o esboço do triedro de Frenet-Serret. Considere um partícula se deslocando sobre a curva no sentido positivo com velocidade escalar estritamente decrescente. Marque na primeira coluna o correto item sobre a aceleração da partícula e, na segunda, a correta afirmação sobre o sinal da torção em cada pedaço da curva.



Aceleração

( ) A componente normal da aceleração é negativa.

(X) A componente tangencial da aceleração é negativa.

( ) A componente tangencial da aceleração é positiva.

( ) A norma do vetor aceleração é constante em todos os pontos.

( ) A norma do vetor aceleração tem derivada zero em todos os pontos.

Torção

( ) A torção é sempre positiva.

(X) A torção é sempre negativa.

( ) A torção é positiva entre P_1 e P_2 e negativa entre P_2 e P_3.

( ) A torção é negativa entre P_1 e P_2 e positiva entre P_2 e P_3.

( ) A torção é zero nos pontos P_1, P_2 e P_3.

• **Questão 3** (1.0 ponto) Seja $\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ um campo vetorial e $f = x^2 + y^2 + z^2$ um campo escalar. Considere $\vec{G} = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} \times \vec{F}$.

Marque na primeira coluna uma expressão para $\iint_S \vec{G} \cdot \vec{\eta} dS$ e, na segunda, o valor de $\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$, onde S é a esfera unitária centrada na origem orientada para fora e C é a circunferência unitária no plano xy centrada na origem orientada no sentido horário.

( ) 0

( ) 2π

( ) 4π

(X) 8π

( ) 16π

(X) 0

( ) 1

( ) -1

( ) 2

( ) -2

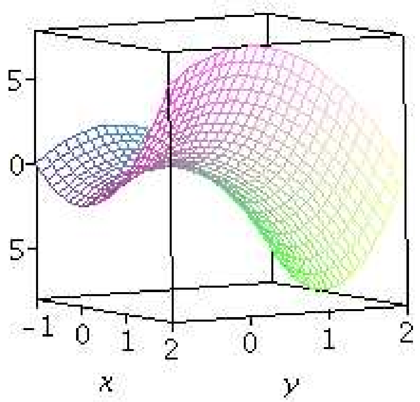
• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere a superfície S aberta dada na figura ao lado, limitada pelo curva C. A superfície S é dada por uma função $z = f(x, y)$, tem simetria axial em relação ao eixo z e o domínio de f é $[-1, 2] \times [-1, 2]$. A superfície S está orientada no sentido de $\vec{k}$ e a curva C está positivamente orientada com respeito a S. Considere o campo $\vec{F} = (x + 1)\vec{j} - 10\vec{k}$ e as seguintes integrais:

$$A = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e

$$B = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Marque na primeira coluna o correto sinal de A e, na segunda, o correto sinal de B.



Sinal de A

(X) $A > 0$.

( ) $A = 0$.

( ) $A < 0$.

( ) Embora $A \neq 0$, não é possível saber seu sinal.

( ) Não há informações suficientes para estimar A.

Sinal de B

( ) $B > 0$.

( ) $B = 0$.

(X) $B < 0$.

( ) Embora $B \neq 0$, não é possível saber seu sinal.

( ) Não há informações suficientes para estimar B.

• **Questão 5** (1.0 ponto) Dado o campo conservativo $\vec{F} = (y^2z^3 + 3y^2x^2z)\vec{i} + (2xyz^3 + 2x^3yz)\vec{j} + (3y^2xz^2 + x^3y^2)\vec{k}$, marque na primeira coluna o pontecial $\phi(x, y, z)$ e, na segunda, o valor $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a curva $\vec{r} = t\vec{i} + \vec{j} + t^2\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

(X) $xy^2z^3 + x^3y^2z$.

( ) $x^2y^2z^2$.

( ) $x^3y^3z^3$.

( ) $3x^2y^2z^2$.

( ) $2xy^2z^3 + 2x^3y^2z$.

( ) 0.

( ) 1.

(X) 2.

( ) 3.

( ) 4.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Considere o campo vetorial $\vec{F} = \vec{i} + y\vec{j} - \vec{k}$ e a superfície S formada pelas seis faces do cubo de lado 2 ($x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$), orientada para fora. Chamamos de S_1 apenas a face $z = -1$ do cubo, orientado no sentido de $-\vec{k}$. Na primeira coluna marque o item que corresponde $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ e, na segunda, $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

( ) 0

( ) -4

(X) 4

( ) -8

( ) 8

( ) 0

( ) 2

( ) 4

(X) 8

( ) 16

- **Questão 7** (2.0 ponto) Considere a função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

  a) Calcule o ponto onde a curvatura é zero.

  b) Discuta a existência dos vetores $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ no ponto do item a).

  c) Encontre o círculo de curvatura referente ao ponto $(1, -7)$ (indique o centro e o raio).

Resp:

a) Primeiro observamos que:

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{1 + f'(x)^2} = \frac{12x + 6}{(1 + (6x^2 + 6x - 12)^2)}.$$

Assim $k(x) = 0$ implica $12x + 6 = 0$, isto é $x = -\frac{1}{2}$.

b) Aqui vale a pena trabalhar com a forma paramétrica:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= t\vec{i} + \left(2t^3 + 3t^2 - 12t\right)\vec{j} \\ \vec{r}'(t) &= \vec{i} + \left(6t^2 + 6t - 12\right)\vec{j} \end{aligned}$$

Assim $\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$. Como $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + (6t^2 + 6t - 12)^2} > 1 > 0$, o vetor $\vec{T}$ está sempre bem definido. No entanto, neste ponto de curatura nula, isto é $\left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = 0$, o vetor normal dado por:

$$\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\|\frac{d\vec{T}}{ds}\|}$$

não está definido, e portanto, $\vec{B}$ tampouco está.

c) Primeiro calculamos a curatura e o raio de curatura no ponto $x = 1$:

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{12x + 6}{(1 + (6x^2 + 6x - 12)^2)} = \frac{12 + 6}{(1 + (6 + 6 - 12)^2)} = 18, \\ \rho(x) &= = \frac{1}{k(x)} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

É fácil ver que a curva é plana com vetor binormal $\vec{B} = \vec{k}$, além disso:

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + \left(6t^2 + 6t - 12\right)\vec{j} = \vec{i} + (6 + 6 - 12)\,\vec{j} = \vec{i}$$

portanto $\vec{N} = \vec{T} \times \vec{B} = \vec{j}$. Assim o raio do círculo de curvatura é 1/18 e seu centro é dado por:

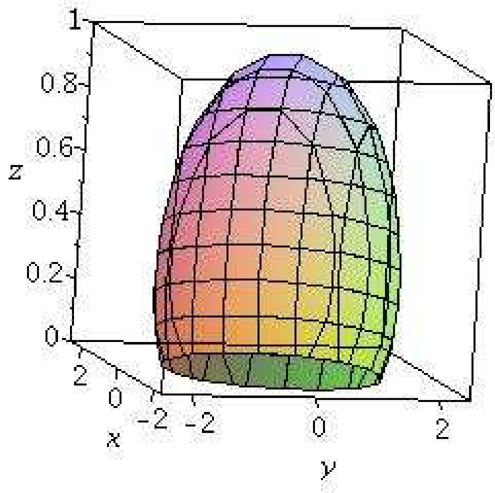
$$(1, -7) + \rho\vec{N} = (1, -125/18)$$

• **Questão 8** (2.0 ponto) Considere a superfície S aberta dada na figura ao lado, orientada no sentido de $\vec{k}$. Seja C a curva no plano $z=0$ que limita S. A equação da superfície é dada por

$$z^2 + 3z^3 + e^{-7z} = 4 - x^2 - y^2.$$

Considere o campo $\vec{F} = -(y+z^2)\vec{i} + x\vec{j} + z^2yx\vec{k}$. Calcule

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$



Dica: Use o teorema de Stokes.

Resp:

Pelo Teorema de Stokes, temos:

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Onde C é a fronteira da superfície S orientada pela regra da mão direita, isto é seguinte circunferência:

$$\vec{r}(t) = \sqrt{3}\cos(t)\vec{i} + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(t)\vec{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad z = 0.$$

(REVISAR)

$$\begin{aligned}
I &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \vec{r}(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-(y+z^2)(-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(t)) + x(\sqrt{3}\cos(t)) \right] dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[3\,\mathrm{sen}^2(t) + 3\cos^2(t) \right] dt = 6\pi
\end{aligned}$$