UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2018/2
Prova da área I

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = \vec{0}$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}f(r) = f'(r)\hat{r}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Curvatura, torção e aceleração:

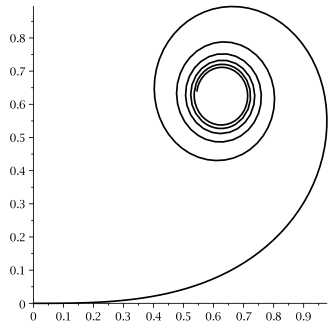
Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t))\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) A espiral de Euler é uma curva cuja curvatura varia linearmente ao longo do comprimento, isto é se s é o comprimento da curva entre seu ponto inicial em um dado ponto P, a curvatura no ponto P é dada por $\kappa(s) = \alpha s$. A espiral de Euler com $\alpha = 1$ no plano xy é parametrizada por:

$$x(t) = \int_0^t \cos(\tau^2)d\tau, \quad y(t) = \int_0^t \text{sen}(\tau^2)d\tau.$$



Assinale as alternativas que indicam respectivamente o vetor tangente em $t = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ e a distância percorrida até o primeiro ponto onde o vetor tangente é $\vec{j}$.

Vetor tangente em $t = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$:

( ) $-\vec{j}$

( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{i}-\vec{j}\right)$

( ) $-\vec{i}$

( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)$

( ) $\vec{j}$

( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$

( ) $\vec{i}$

Distância percorrida até o primeiro ponto onde o vetor tangente é $\vec{j}$:

( ) $\sqrt{2\pi}$

( ) $\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$

( ) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

( ) $\sqrt{\pi}$

( ) $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$

( ) $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$

Observamos que:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \int_0^t \cos(\tau^2)d\tau\,\vec{i} + \int_0^t \text{sen}(\tau^2)d\tau\,\vec{j} \\
\vec{r'}(t) &= \cos(t^2)\vec{i} + \text{sen}(t^2)\vec{j} \\
\|\vec{r'}(t)\| &= \sqrt{\cos(t^2)^2 + \text{sen}(t^2)^2} = 1 \\
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r'}(t)}{\|\vec{r'}(t)\|} = \cos(t^2)\vec{i} + \text{sen}(t^2)\vec{j} \\
\vec{T}\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}
\end{aligned}$$

O vetor tangente é $\vec{j}$ quando $\cos(t^2) = 0$ e $\text{sen}(t^2) = 1$, o que acontece pela primeira vez quando $t^2 = \frac{\pi}{2}$ Para a distância, temos:

$$s = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} ds = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \|\vec{r}'(t)\|dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

• **Questão 2** (1.0 ponto) A temperatura em uma sala com uma parede aquecida é modelada por

$$T(x,y,z) = 80e^{-x} - 20\left(y^2 + z^2\right).$$

Uma abelha se encontra na posição (1,1,0). Assinale a alternativa que indica a direção e sentido de máxima taxa de variação da temperatura neste ponto e o valor desta taxa de variação.

Direção e sentido:

( ) $\dfrac{-2e^{-1}\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1+4e^{-2}}}$

( ) $\dfrac{-2e^{-1}\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{1+4e^{-2}}}$

( ) $\dfrac{-\vec{i} + 2e^{-1}\vec{j}}{\sqrt{1+4e^{-2}}}$

( ) $\dfrac{-\vec{i} - 2e^{-1}\vec{j}}{\sqrt{1+4e^{-2}}}$

( ) Nenhuma das anteriores

Taxa de variação máxima:

( ) $80\sqrt{1+4e^{-2}}$

( ) $40\sqrt{1+4e^{-2}}$

( ) $20\sqrt{1+4e^{-2}}$

( ) $10\sqrt{1+4e^{-2}}$

( ) $5\sqrt{1+4e^{-2}}$

Calculamos o gradiente:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}T(x,y,z) &= -80e^{-x}\vec{i} - 40y\vec{j} - 40z\vec{k}\\ \vec{\nabla}T(1,1,0) &= -80e^{-1}\vec{i} - 40\vec{j}\end{aligned}$$

Assim a taxa de máxima variação é

$$\|\vec{\nabla}T(1,1,0)\| = \sqrt{80^2e^{-2} + 40^2} = 40\sqrt{4e^{-2}+1} = 40\sqrt{1+4e^{-2}}$$

A direção é sentido é dada por:

$$\frac{\vec{\nabla}T(1,1,0)}{\|\vec{\nabla}T(1,1,0)\|} = \frac{-80e^{-1}\vec{i} - 40\vec{j}}{40\sqrt{1+4e^{-2}}} = \frac{-2e^{-1}\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{1+4e^{-2}}}$$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere a curva parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{t^2}{2}\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{k},$$

onde c é uma constante. Assinale as alternativas que indicam corretamente a expressão para a torção e curvatura:

Torção τ:

( ) $\dfrac{2\sqrt{1+t^2+4t^4}}{1+t^2+t^4}$

( ) $\dfrac{2\sqrt{1+t^2+4t^4}}{1+4t^2+t^4}$

( ) $\dfrac{2}{1+t^2+t^4}$

( ) $\dfrac{2}{1+4t^2+t^4}$

( ) $\dfrac{2}{1+t^2+t^4}$

Curvatura κ:

( ) $\dfrac{\sqrt{1+4t^2+t^4}}{(1+t^2+4t^4)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{\sqrt{1+t^2+t^4}}{(1+t^2+4t^4)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{\sqrt{1+4t^2+t^4}}{(1+t^2+t^4)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{\sqrt{1+t^2+4t^4}}{(1+t^2+4t^4)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{\sqrt{1+t^2+4t^4}}{(1+4t^2+t^4)^{3/2}}$

Observamos que:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= t\vec{i} + \frac{t^2}{2}\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{k} \\ \vec{r}'(t) &= \vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k} \\ \vec{r}''(t) &= \vec{j} + 2t\vec{k} \\ \vec{r}'''(t) &= 2\vec{k} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= t^2\vec{i} - 2t\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'''(t) &= 2 \\ \|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{1+t^2+t^4} \\ \|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| &= \sqrt{1+4t^2+t^4} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{1+4t^2+t^4}}{(1+t^2+t^4)^{3/2}} \\ \tau(t) &= \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|^2} = \frac{2}{1+4t^2+t^4} \end{aligned}$$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere o campo radial $\vec{F} = r^n\hat{r}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $n \geq 0$. Seja C a circunferência de raio a no plano xy centrada na origem e orientada no sentido horário e S a esfera centrada na origem de raio $a > 0$ orientada para fora.

Assinale a alternativa que indica $W := \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $\Phi := \oiint_C \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Circulação W:

( ) $-2\pi a^{n+2}$

( ) $-2\pi a^{n+1}$

( ) $2\pi a^{n+2}$

( ) $2\pi a^{n+1}$

( ) 0

Fluxo Φ:

( ) $4\pi a^{n+1}$

( ) $4\pi a^{n+2}$

( ) $4\pi a^{n+3}$

( ) $4\pi a^{n+1}/3$

( ) $4\pi a^{n+2}/3$

( ) $4\pi a^{n+3}/3$

Como todo campo radial é conservativo e C é fechado, $W = 0$. Calculemos Φ:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oiint_C \vec{F} \cdot d\vec{S} \\
\Phi &= \oiint_C \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
\Phi &= \oiint_C \vec{F} \cdot \hat{r} dS \\
\Phi &= \oiint_C r^n dS \\
\Phi &= \oiint_C a^n dS \\
\Phi &= a^n \oiint_C dS \\
\Phi &= a^n \left(4\pi a^2\right) = 4\pi a^{n+2}
\end{aligned}$$

• **Questão 5** (1.0 ponto) Considere o campo conservativo $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + y\vec{k}$
Assinale a alternativa que indica um potencial φ para F a o valor de a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde C é parametrizado por:

$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (1+t)\vec{j} + t^5\vec{k}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Potencial:

( ) $\varphi(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2}{2} + xy + yz$

( ) $\varphi(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + xy + yz + 1$

( ) $\varphi(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2}{2} + xy^2 + yz + 3$

( ) $\varphi(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + x^2y^2z^2$

( ) Nenhuma das anteriores.

Integral de linha:

( ) $3/2$

( ) $5/2$

( ) $9/2$

( ) $-9/2$

( ) $-5/2$

( ) $-3/2$

( ) Nenhuma das anteriores.

Para calcular o potencial, observamos que:

$$\phi_x = x + y \Longrightarrow \phi = \frac{x^2}{2} + xy + C(y,z)$$

Assim

$$\phi_y = x + C_y(y,z) = x + z \Longrightarrow C(y,z) = yz + D(z)$$

e:

$$\phi_z = y + D'(z) = y \Longrightarrow D(z) = E \text{ (constante)}.$$

Finalmente:

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xy + yz + E$$

Para a integral de linha, basta calcular a diferença de potencial:

$$\begin{aligned} W &= \varphi(x_1,y_1,z_1) - \varphi(x_0,y_0,z_0) \\ &= \varphi(1,2,1) - \varphi(0,1,0) \\ &= (1/2 + 2 + 2 + E) - (0 + 0 + 0 + E) = 9/2 \end{aligned}$$

• **Questão 6** (1.0 ponto) Considere o campo $\vec{F}(x,y,z) = f(x,y)\vec{i} + g(x,y)\vec{j}$ esboçado na figura ao lado e os caminhos C_1, C_2 e C_3 que começam no ponto $(4,4,0)$ e terminam no ponto $(-2,-2,0)$. Defina $W_1 = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $W_2 = \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ e $W_3 = \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

Assinale as alternativas corretas:

( ) $\vec{j}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} > 0$ em todos pontos.

( ) $\vec{j}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} < 0$ em todos pontos.

( ) $\vec{\nabla}\times\vec{F} \neq \vec{0}$ em alguns pontos, mas $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ para todo caminho fechado.

( ) $\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ em todos pontos.

(X) $\vec{i}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ em todos pontos.

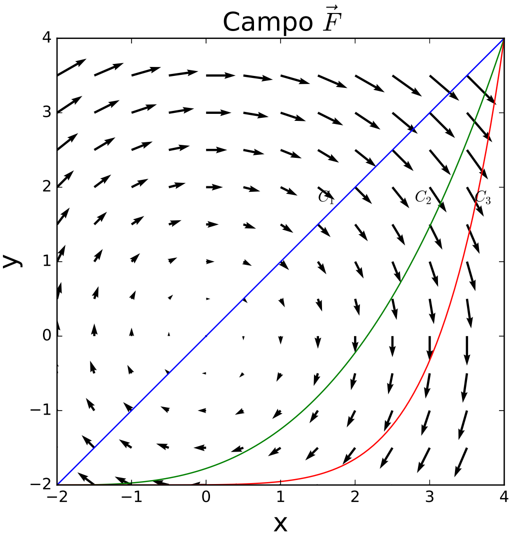
( ) $W_1 = W_2 = W_3$

( ) $0 = W_1 < W_2 = W_3$

(X) $0 = W_1 < W_2 < W_3$

( ) $0 < W_1 = W_2 = W_3$

( ) $0 < W_1 < W_2 = W_3$



• **Questão 7** (2.0 ponto) Considere o campo $\vec{F} = -z\vec{i} + x\vec{j} + x\vec{k}$ e a superfície triangular S no plano xy orientada no sentido z positivo e limitada pelo caminho C composto pelos segmentos de reta que ligam os pontos $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (1,0,0)$ e $P_3 = (1,1,0)$ no sentido $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$.

Calcule o valor da integral de linha de $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e de superfície $\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Para calcular W, usamos o teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_S dS = 1/2 \end{aligned}$$

Para calcular Φ, integramos diretamente na superfície:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} == \iint_S z dS \\ &= \int_0^1 \int_0^x x dy dx = \int_0^1 x^2 dx = 1/3 \end{aligned}$$

• **Questão 8** (2.0 pontos) Considere a superfície fechada orientada para fora composta superiormente pela superfície de rotação descrita como

$$z = f(x,y) = \cos(x^2+y^2), \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

e inferiormente por

$$z = 0, \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Seja o campo vetorial dado por $\vec{F} = x\vec{j} + 2z\vec{k}$. Use o teorema da divergência para calcular o valor do fluxo $\Phi := \iint \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\
&= \iint 2dV \\
&= 2\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{\cos(\rho^2)} \rho dz d\rho d\theta \\
&= 4\pi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{\cos(\rho^2)} \rho dz d\rho \\
&= 4\pi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos(\rho^2) \rho d\rho \\
&= 4\pi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos(\rho^2) \rho d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) du = 2\pi
\end{aligned}$$