**UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA**
**Departamento de Matemática Pura e Aplicada**
**MAT01168 - Turma D - 2018/2**
**Prova da área I**

| 1-6 | 7 | 8 | Total |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Nome:** ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

| | |
|---|---|
| 1. | $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$ |
| 2. | $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$ |
| 3. | $\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$ |
| 4. | $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$ |
| 5. | $\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$ |
| 6. | $\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$ |
| 7. | $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano |
| 8. | $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$ |
| 9. | $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$ |
| 10. | $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$ |
| 11. | $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$ |
| 12. | $\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$ |
| 13. | $\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$ |
| 14. | $\vec{\nabla}f(r) = f'(r)\hat{r},\quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ |

Curvatura, torção e aceleração:

| Nome | Definição |
|---|---|
| Curvatura | $\kappa = \left\Vert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$ |
| Torção | $\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{\left(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right)\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$ |
| Módulo da torção | $\vert\tau\vert = \left\Vert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$ |
| Aceleração normal | $a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$ |
| Aceleração tangencial | $a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$ |

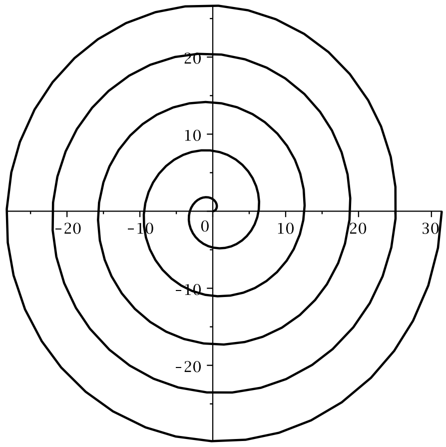
Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere a curva plana parametrizada por:

$$x(t) = t\cos(t), \quad y(t) = t\,\mathrm{sen}(t), \quad z(t) = 0, \quad -t \geq 0$$

Pode-se afirmar que o vetor tangente unitário e a curvatura em $t = \dfrac{\pi}{2}$ são respectivamente:




Vetor $\vec{T}$:

( ) $\dfrac{\pi\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{4+\pi^2}}$

( ) $\dfrac{-\pi\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{4+\pi^2}}$

( ) $\dfrac{\pi\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{4+\pi^2}}$

( ) $\dfrac{-\pi\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{4+\pi^2}}$

( ) $\dfrac{2\vec{i} + \pi\vec{j}}{\sqrt{4+\pi^2}}$

( ) $\dfrac{-2\vec{i} + \pi\vec{j}}{\sqrt{4+\pi^2}}$

Curvatura $\kappa$:

( ) $\dfrac{16 + 2\pi^2}{(4+\pi^2)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{8 + \pi^2}{(4+\pi^2)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{8 + 2\pi^2}{(4+\pi^2)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{4 + \pi^2}{(4+\pi^2)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{4 + 2\pi^2}{(4+\pi^2)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{2 + \pi^2}{(4+\pi^2)^{3/2}}$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Em um determinado instante, a posição, velocidade e aceleração de uma partícula são dadas por:

$$\vec{r}(t) = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{v}(t) = 3\vec{i} + 4\vec{k}, \quad \vec{a}(t) = 5\vec{i} + 2\vec{j}$$

Pode-se afirmar que a aceleração tangencial e o vetor normal unitário no dado instante são, respectivamente:

Aceleração tangencial:

( ) 0

( ) 1

( ) 2

( ) 3

( ) 4

( ) 5

Vetor $\vec{N}$:

( ) $\dfrac{\sqrt{5}}{25}\left[8\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}\right]$

( ) $\dfrac{\sqrt{5}}{25}\left[8\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}\right]$

( ) $\dfrac{\sqrt{5}}{25}\left[-5\vec{i} + 8\vec{j} + 6\vec{k}\right]$

( ) $\dfrac{\sqrt{5}}{25}\left[5\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{k}\right]$

( ) $\dfrac{\sqrt{5}}{25}\left[-6\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}\right]$

( ) $\dfrac{\sqrt{5}}{25}\left[6\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k}\right]$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere o campo radial $\vec{F} = r^n\hat{r}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $n \geq 0$. Seja $C$ a circunferência de raio $a$ no plano $xy$ centrada na origem e orientada no sentido horário e $S$ a esfera centrada na origem de raio $a > 0$ orientada para fora.

Assinale a alternativa que indica $W := \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $\Phi := \oiint_C \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Circulação $W$:

( ) $-2\pi a^{n+2}$

( ) $-2\pi a^{n+1}$

( ) $2\pi a^{n+2}$

( ) $2\pi a^{n+1}$

( ) 0

Fluxo $\Phi$:

( ) $4\pi a^{n+1}$

( ) $4\pi a^{n+2}$

( ) $4\pi a^{n+3}$

( ) $4\pi a^{n+1}/3$

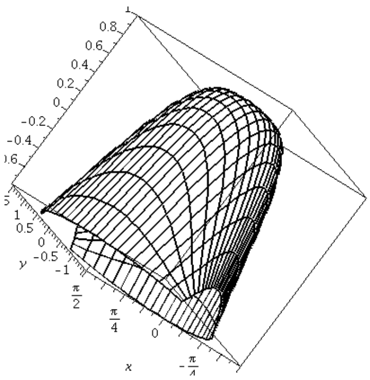
( ) $4\pi a^{n+2}/3$

( ) $4\pi a^{n+3}/3$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere a superfície dada por

$$z = f(x,y) = \cos(x^2 + 2y^2), \quad \sqrt{x^2 + 2y^2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Assinale a alternativa que indica as curvas de nível da função $f(x,y)$ e o vetor normal unitário à **superfície** no ponto $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e $y = 0$ orientado para fora da concavidade.



As curvas de nível são:

( ) Circunferências

( ) Elipses de semieixos distintos

( ) Parábolas

( ) Hipérboles

( ) Nenhuma das anteriores

Vetor normal:

( ) $\dfrac{\sqrt{2\pi}\,\vec{i} + 2\vec{k}}{\sqrt{4 + 2\pi}}$

( ) $\dfrac{\sqrt{2\pi}\,\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{4 + 2\pi}}$

( ) $\dfrac{-\sqrt{2\pi}\,\vec{i} + 2\vec{k}}{\sqrt{4 + 2\pi}}$

( ) $\dfrac{-\sqrt{2\pi}\,\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{4 + 2\pi}}$

• **Questão 5** (1.0 ponto) Considere o campo $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(x^2 + y + yz^3 + xy(1-z) + 5\right)$ e os caminhos $C_1$ e $C_2$ parametrizados por:

$$C_1 : \ \vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (1+t)\vec{j} + t^5\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$
$$C_2 : \ \vec{r}(t) = \cos(t)\vec{j} + \text{sen}(t)\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Assinale a alternativa que indica o valor das integrais de linha de $W_1 = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ e $W_2 = \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

$W_1$:

( ) 2

( ) $\frac{3}{2}$

( ) 1

( ) $\frac{1}{2}$

( ) 0

$W_2$:

( ) 0

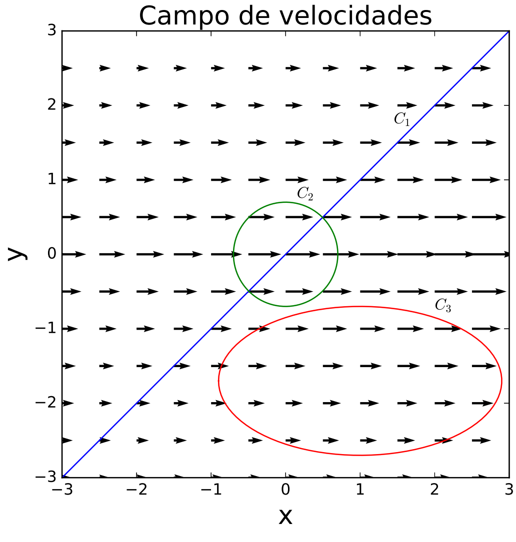
( ) $-\pi$

( ) $-\frac{3\pi}{2}$

( ) $-2\pi$

( ) $-\frac{5\pi}{2}$

• **Questão 6** (1.0 ponto) Considere o campo $\vec{F}(x,y,z) = f(x,y)\vec{i}$ esboçado na figura ao lado e os caminhos $C_1$, $C_2$ e $C_3$. $C_1$ é a reta que começa no ponto $(-3,-3,0)$ e terminam no ponto $(3,3,0)$. O círculo $C_2$ está no no plano $xy$ centrado na origem e é orientado no sentido anti-horário. $C_3$ é uma elipse no plano $xy$ orientada no sentido anti-horário. Defina $W_1 = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $W_2 = \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ e $W_3 = \oint_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$.




Assinale as alternativas corretas:

( ) $W_3 < 0 = W_2 < W_1$

( ) $W_1 < 0 = W_2 < W_3$

( ) $0 = W_1 < W_2 = W_3$

( ) $W_1 < W_2 = W_3 = 0$

( ) $W_1 < W_2 < W_3 < 0$

( ) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} < 0$ em $(2,2)$.

( ) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} \geq 0$ em todos os pontos.

( ) $\vec{\nabla}\times\vec{F} \neq \vec{0}$ em alguns pontos, mas $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ para todo caminho fechado.

( ) $\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ em todos pontos.

( ) $\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} > 0$ em $(2,2)$.

• **Questão 7** (2.0 ponto) Considere o campo $\vec{F} = -z\vec{i} + x\vec{j} + x\vec{k}$ e a superfície circular $S$ no plano $xy$ orientada no sentido $z$ positivo e limitada pelo caminho circuferência $C$ de raio unitário centrada na origem e orientada no sentido anti-horário.

Calcule o valor da integral de linha de $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e de superfície $\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

• **Questão 8** (2.0 pontos) Considere a superfície fechada orientada para fora composta por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0$$

e

$$y^2 + z^2 \leq 1, x = 0.$$

Seja o campo vetorial dado por $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(x^3 + z + yz + 1\right)$.

Calcule o valor do fluxo

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{S}$$