UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2018/2
Prova da área I

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}f(r) = f'(r)\hat{r}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert \frac{d\vec{T}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert = \frac{\Vert \vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert \vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{\left(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right)\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert \vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert \frac{d\vec{B}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert \vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

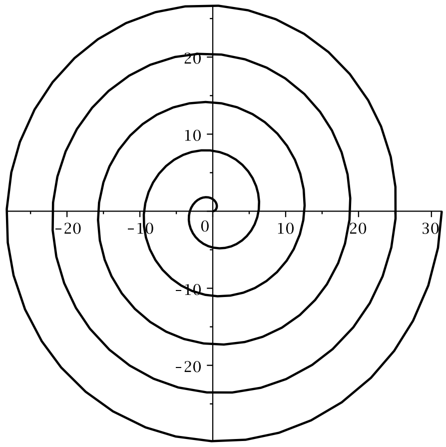
Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere a curva plana parametrizada por:

$$x(t) = t\cos(t), \quad y(t) = t\,\mathrm{sen}(t), \quad z(t) = 0, \quad -\, t \geq 0$$

Pode-se afirmar que o vetor tangente unitário e a curvatura em $t = \dfrac{\pi}{2}$ são respectivamente:



Vetor $\vec{T}$:

( ) $\dfrac{\pi\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{4+\pi^2}}$

( ) $\dfrac{-\pi\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{4+\pi^2}}$

( ) $\dfrac{\pi\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{4+\pi^2}}$

( ) $\dfrac{-\pi\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{4+\pi^2}}$

( ) $\dfrac{2\vec{i} + \pi\vec{j}}{\sqrt{4+\pi^2}}$

( ) $\dfrac{-2\vec{i} + \pi\vec{j}}{\sqrt{4+\pi^2}}$

Curvatura κ:

( ) $\dfrac{16+2\pi^2}{(4+\pi^2)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{8+\pi^2}{(4+\pi^2)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{8+2\pi^2}{(4+\pi^2)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{4+\pi^2}{(4+\pi^2)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{4+2\pi^2}{(4+\pi^2)^{3/2}}$

( ) $\dfrac{2+\pi^2}{(4+\pi^2)^{3/2}}$

Primeiro calculamos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= t\cos(t)\vec{i} + t\,\mathrm{sen}(t)\vec{j} \\
\vec{r}'(t) &= (\cos(t) - t\,\mathrm{sen}(t))\,\vec{i} + (\mathrm{sen}(t) + t\cos(t))\,\vec{j} \\
\vec{r}''(t) &= (-2\,\mathrm{sen}(t) - t\cos(t))\,\vec{i} + (2\cos(t) - t\,\mathrm{sen}(t))\,\vec{j}
\end{aligned}$$

Assim, em $t = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\vec{r}' &= -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \vec{j} \\
\vec{r}'' &= -2\vec{i} - \frac{\pi}{2}\vec{j}
\end{aligned}$$

Portanto :

$$\begin{aligned}
\|\vec{r}'\| &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+4} \\
\vec{r}' \times \vec{r}'' &= \left(\frac{\pi^2}{4} + 2\right)\vec{k} \\
\|\vec{r}' \times \vec{r}''\| &= \frac{\pi^2}{4} + 2
\end{aligned}$$

E, finalmente:

$$\begin{aligned}
\vec{T} &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{-\pi\vec{i} + 2\vec{j}}{\pi^2+4} \\
\kappa &= \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} = \frac{\frac{\pi^2}{4} + 2}{\left(\frac{\pi^2}{4} + 2\right)^{3/2}} = \frac{2\pi^2 + 16}{(\pi^2+8)^{3/2}}
\end{aligned}$$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Em um determinado instante, a posição, velocidade e aceleração de uma partícula são dadas por:

$$\vec{r}(t) = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{v}(t) = 3\vec{i} + 4\vec{k}, \quad \vec{a}(t) = 5\vec{i} + 2\vec{j}$$

Pode-se afirmar que a aceleração tangencial e o vetor normal unitário no dado instante são, respectivamente:

Aceleração tangencial:

( ) 0
( ) 1
( ) 2
( ) 3
( ) 4
( ) 5

Vetor $\vec{N}$:

( ) $\frac{\sqrt{5}}{25}\left[8\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}\right]$

( ) $\frac{\sqrt{5}}{25}\left[8\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}\right]$

( ) $\frac{\sqrt{5}}{25}\left[-5\vec{i} + 8\vec{j} + 6\vec{k}\right]$

( ) $\frac{\sqrt{5}}{25}\left[5\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{k}\right]$

( ) $\frac{\sqrt{5}}{25}\left[-6\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}\right]$

( ) $\frac{\sqrt{5}}{25}\left[6\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k}\right]$

Primeiramente, usamos a fórmula para obter a aceleração tangencial:

$$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{15}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

Agora basta isolar $\vec{N}$ na expressão:

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$$

onde

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{k}}{5}$$

Assim

$$\begin{aligned} a_N\vec{N} &= \vec{a} - a_T\vec{T} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\left(\frac{3\vec{i} + 4\vec{k}}{5}\right) \\ &= \frac{16}{5}\vec{i} + 2\vec{j} - \frac{12}{5}\vec{i} \\ &= \frac{2}{5}\left(8\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{i}\right) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\vec{N} = \frac{8\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{i}}{\sqrt{8^2 + 5^2 + 6^2}} = \frac{\sqrt{5}}{25}\left[8\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}\right]$$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere o campo radial $\vec{F} = r^n \hat{r}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $n \geq 0$. Seja C a circunferência de raio a no plano xy centrada na origem e orientada no sentido horário e S a esfera centrada na origem de raio $a > 0$ orientada para fora.

Assinale a alternativa que indica $W := \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $\Phi := \oiint_C \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Circulação W:

( ) $-2\pi a^{n+2}$

( ) $-2\pi a^{n+1}$

( ) $2\pi a^{n+2}$

( ) $2\pi a^{n+1}$

( ) 0

Fluxo Φ:

( ) $4\pi a^{n+1}$

( ) $4\pi a^{n+2}$

( ) $4\pi a^{n+3}$

( ) $4\pi a^{n+1}/3$

( ) $4\pi a^{n+2}/3$

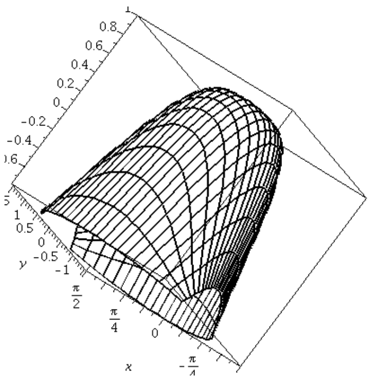
( ) $4\pi a^{n+3}/3$

Como todo campo radial é conservativo e C é fechado, $W = 0$. Calculemos Φ:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oiint_C \vec{F} \cdot d\vec{S} \\
\Phi &= \oiint_C \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
\Phi &= \oiint_C \vec{F} \cdot \hat{r} dS \\
\Phi &= \oiint_C r^n dS \\
\Phi &= \oiint_C a^n dS \\
\Phi &= a^n \oiint_C dS \\
\Phi &= a^n \left(4\pi a^2\right) = 4\pi a^{n+2}
\end{aligned}$$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere a superfície dada por

$$z = f(x,y) = \cos(x^2+2y^2), \quad \sqrt{x^2+2y^2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$



Assinale a alternativa que indica as curvas de nível da função $f(x,y)$ e o vetor normal unitário à **superfície** no ponto $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e $y = 0$ orientado para fora da concavidade.

As curvas de nível são:

( ) Circunferências

( ) Elipses de semieixos distintos

( ) Parábolas

( ) Hipérboles

( ) Nenhuma das anteriores

Vetor normal:

( ) $\frac{\sqrt{2\pi}\,\vec{i}+2\vec{k}}{\sqrt{4+2\pi}}$

( ) $\frac{\sqrt{2\pi}\,\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{4+2\pi}}$

( ) $\frac{-\sqrt{2\pi}\,\vec{i}+2\vec{k}}{\sqrt{4+2\pi}}$

( ) $\frac{-\sqrt{2\pi}\,\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{4+2\pi}}$

As curvas de nível são elipses.
Defina a função auxiliar

$$G(x,y,z) = z - \cos(x^2+2y^2)$$

Assim

$$\vec{\nabla} G = 2x\,\mathrm{sen}(x^2+2y^2)\vec{i} + 4y\,\mathrm{sen}(x^2+2y^2)\vec{j} + \vec{k}$$

No ponto $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e $y = 0$, temos:

$$\vec{\nabla} G = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \vec{k}$$

Como o vetor normal tem componente z positiva, ele é dado por:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} G}{\|\vec{\nabla} G\|} = \frac{\sqrt{2\pi}\,\vec{i}+2\vec{k}}{\sqrt{4+2\pi}}$$

• **Questão 5** (1.0 ponto) Considere o campo $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(x^2 + y + yz^3 + xy(1-z) + 5\right)$ e os caminhos C_1 e C_2 parametrizados por:

$$C_1 : \ \vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (1+t)\vec{j} + t^5\vec{k}, \quad 0 \le t \le 1.$$
$$C_2 : \ \vec{r}(t) = \cos(t)\vec{j} + \operatorname{sen}(t)\vec{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Assinale a alternativa que indica o valor das integrais de linha de $W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $W_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

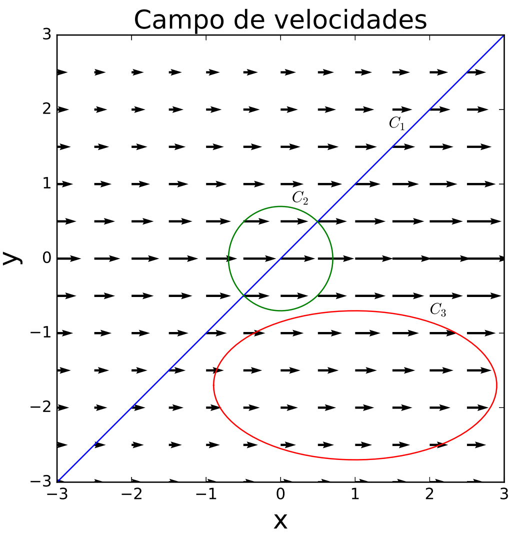
W_1:	W_2:
( ) 2	( ) 0
( ) $\frac{3}{2}$	( ) $-\pi$
( ) 1	( ) $-\frac{3\pi}{2}$
( ) $\frac{1}{2}$	( ) -2π
( ) 0	( ) $-\frac{5\pi}{2}$

Como o campo é da forma $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$, temos que a integral de linha é diferença do potencial φ.
O caminho C_1 começa no ponto $(0, 1, 0)$ e termina em $(1, 2, 1)$, assim

$$W_1 = 10 - 6 = 4$$

O caminho C_2 é fechado, então a circulação é nula.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Considere o campo $\vec{F}(x,y,z) = f(x,y)\vec{i}$ esboçado na figura ao lado e os caminhos C_1, C_2 e C_3. C_1 é a reta que começa no ponto $(-3,-3,0)$ e terminam no ponto $(3,3,0)$. O círculo C_2 está no no plano xy centrado na origem e é orientado no sentido anti-horário. C_3 é uma elipse no plano xy orientada no sentido anti-horário. Defina $W_1 = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $W_2 = \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ e $W_3 = \oint_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$.



Assinale as alternativas corretas:

(x) $W_3 < 0 = W_2 < W_1$

( ) $W_1 < 0 = W_2 < W_3$

( ) $0 = W_1 < W_2 = W_3$

( ) $W_1 < W_2 = W_3 = 0$

( ) $W_1 < W_2 < W_3 < 0$

( ) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} < 0$ em $(2,2)$.

(x) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} \geq 0$ em todos os pontos.

( ) $\vec{\nabla}\times\vec{F} \neq \vec{0}$ em alguns pontos, mas $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ para todo caminho fechado.

( ) $\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ em todos pontos.

( ) $\vec{j}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} > 0$ em $(2,2)$.

• **Questão 7** (2.0 ponto) Considere o campo $\vec{F} = -z\vec{i} + x\vec{j} + x\vec{k}$ e a superfície circular S no plano xy orientada no sentido z positivo e limitada pelo caminho circuferência C de raio unitário centrada na origem e orientada no sentido anti-horário.

Calcule o valor da integral de linha de $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e de superfície $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Primeiro, calculamos W. **Primeira opção - via parametriazação direta:**
Parametrizamos o caminho como:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \\ \vec{r}'(t) &= -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} W &= \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \vec{r}'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (z \operatorname{sen}(t) + x\cos(t))\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$

Segunda opção - via teorema de Stokes:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} dS$$

$$\iint_S dS = \pi$$

Agora calculamos Φ:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{k} dS \\ &= \iint_S x dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos(\theta) d\theta d\rho = 0 \end{aligned}$$

• **Questão 8** (2.0 pontos) Considere a superfície fechada orientada para fora composta por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0$$

e

$$y^2 + z^2 \leq 1, x = 0.$$

Seja o campo vetorial dado por $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(x^3 + z + yz + 1\right)$.

Calcule o valor do fluxo

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\
&= \iint_S 6x dV \\
&= 6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^1 x r^2 \operatorname{sen} \varphi dr d\varphi d\theta \\
&= 6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^3 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos(\theta) dr d\varphi d\theta \\
&= 6 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta \right) \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^1 r^3 d\varphi \right) \\
&= 6 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

onde usamos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \nabla^2 \left(x^3 + z + yz + 1\right) = 6x$$