**UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA**
**Departamento de Matemática Pura e Aplicada**
**MAT01168 - Turma A - 2019/1**
**Prova da área I**

| 1-6 | 7 | 8 | Total |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Nome:** ______________________________ **Cartão:** ____________

**Ponto extra:** ( )Wikipédia ( )Apresentação ( )Nenhum **Tópico:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

| | |
|---|---|
| 1. | $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$ |
| 2. | $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$ |
| 3. | $\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$ |
| 4. | $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$ |
| 5. | $\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$ |
| 6. | $\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$ |
| 7. | $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano |
| 8. | $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$ |
| 9. | $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$ |
| 10. | $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$ |
| 11. | $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$ |
| 12. | $\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$ |
| 13. | $\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$ |
| 14. | $\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$ |

Curvatura, torção e aceleração:

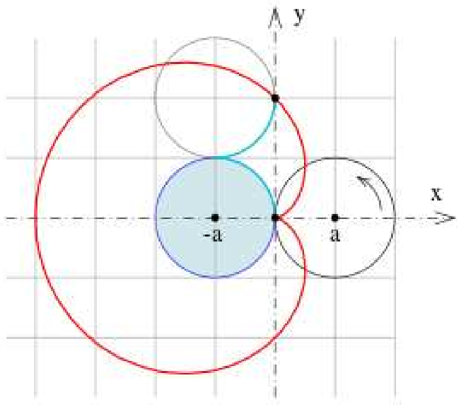
| Nome | Definição |
|---|---|
| Curvatura | $\kappa = \left\Vert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$ |
| Torção | $\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{\left(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right)\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$ |
| Módulo da Torção | $\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$ |
| Aceleração normal | $a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$ |
| Aceleração tangencial | $a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$ |

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Dados dois círculos no plano $xy$, um fixo e outro rolando sobre o primeiro, um ponto sobre o círculo rolante produz uma curva chamada cardioide. Considere a trajetória deste ponto parametrizada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $0 \le t < 2\pi$, onde $a$ é uma constante e

$$x(t) = 2a(1 - \cos(t))\cos(t) \ ,$$
$$y(t) = 2a(1 - \cos(t))\,\mathrm{sen}(t) \ .$$




Supondo $a = 1$, assinale na primeira coluna o menor valor do parâmetro $t$ para o qual $\vec{r}(t) = (-4, 0)$. Na segunda coluna assinale o vetor velocidade neste instante:

O parâmetro $t$:

( ) $\frac{\pi}{2}$

( ) $\pi$

( ) $\frac{3\pi}{2}$

( ) $2\pi$

( ) $\frac{5\pi}{2}$

Velocidade:

( ) $2\vec{i}$

( ) $4\vec{i}$

( ) $6\vec{i}$

( ) $-2\vec{j}$

( ) $-4\vec{j}$

( ) $-6\vec{j}$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere a curva parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \mathrm{sen}(t)\vec{j} + \mathrm{sen}(2t)\vec{k}.$$

Assinale as alternativas que indicam respectivamente a curvatura em $t = \frac{\pi}{2}$ e torção em $t = \frac{\pi}{2}$:

Curvatura em $t = \frac{\pi}{2}$

( ) $\frac{1}{5}$

( ) $\frac{2}{5}$

( ) $\frac{3}{5}$

( ) $\frac{4}{5}$

( ) $1$

( ) $\frac{6}{5}$

Torção em $t = \frac{\pi}{2}$

( ) $\frac{2}{5}$

( ) $\frac{4}{5}$

( ) $\frac{6}{5}$

( ) $\frac{8}{5}$

( ) $2$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere a função vetorial dada por $\vec{r}(t) = \ln(1+t)\vec{i} + \sqrt{1-t}\vec{j}$. Assinale na primeira coluna o domínio de definição de $\vec{r}(t)$ e, na segunda, a declividade (coeficiente angular) da reta tangente à curva 2-D representada por ela no plano xy no ponto em que $t = 3/4$.

Domínio:

( ) $[-1, 1)$

( ) $[-1, 1]$

( ) $(-1, 1]$

( ) $(-1, 1)$

( ) Nenhuma das anteriores

Declividade:

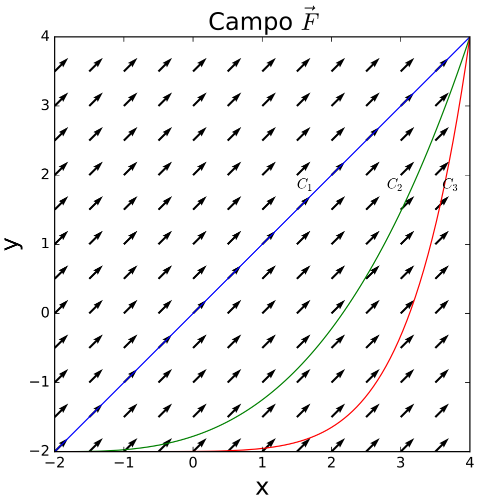
( ) $-1/4$

( ) $-3/4$

( ) $-5/4$

( ) $-7/4$

( ) $-9/4$




• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere o campo constante $\vec{F}(x, y, z) = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j}$ esboçado na figura ao lado e os caminhos $C_1$, $C_2$ e $C_3$ que começam no ponto $(-2, -2, 0)$ e terminam no ponto $(4, 4, 0)$. O caminho $C_4$ é a reta que liga o ponto $(-2, -2, 0)$ ao ponto $(4, 4, 4)$. Defina $W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $W_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $W_3 = \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $W_4 = \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Assinale as alternativas corretas:

( ) $0 = W_1 = W_2 = W_3$

( ) $0 < W_1 = W_2 = W_3$

( ) $0 < W_1 < W_2 = W_3$

( ) $0 = W_1 < W_2 < W_3$

( ) $0 = W_1 < W_2 = W_3$

( ) $W_4 = \frac{1}{2}W_1$.

( ) $W_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}W_1$.

( ) $W_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}W_1$.

( ) $W_4 = W_1$.

( ) $W_4 = \sqrt{2}W_1$.

• **Questão 5** (1.0 ponto) Seja $S$ a superfície no plano $xy$ limitada pelos eixos $x$ e $y$, pelas retas $x = e$ e $y = e$ e a hipérbole $xy = 1$. A superfície $S$ é orientada no sentido positivo do eixo $z$ e o caminho $C$ é a curva que limita $S$ orientada pela regra da mão direita. Seja $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ e $\vec{G} = \vec{\nabla}\|\vec{F}\|$.

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, os valores de $W_1 := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $W_2 := \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$.

$W_1$:

( ) $-6$

( ) $-3$

( ) $0$

( ) $3$

( ) $6$

$W_2$:

( ) $-6$

( ) $-3$

( ) $0$

( ) $3$

( ) $6$

• **Questão 6** (1.0 ponto) Uma abelha se desloca em uma região onde a temperatura $T(x, y, z)$ é dada em kelvin pela expressão :

$$T(x, y, z) = 300 - 2(x^2 + y^2) - 2z + z^2.$$

O curioso inseto está no ponto $(1, 1, 1)$ e se desloca na direção de máxima taxa de variação da temperatura a uma velocidade de 3m/s. Assinale na primeira alternativa o vetor velocidade da abelha e, na segunda coluna, derivada temporal da temperatura em $K/s$.

Velocidade:

( ) $\vec{v} = -\frac{3}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{v} = -\frac{3}{\sqrt{6}}\left(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\right)$

( ) $\vec{v} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$

( ) $\vec{v} = -\frac{3}{2}\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$

( ) $\vec{v} = -\frac{3}{2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$

( ) $\vec{v} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$

$\frac{dT}{dt}$ :

( ) $\frac{dT}{dt} = 0$

( ) $\frac{dT}{dt} = \sqrt{2}$

( ) $\frac{dT}{dt} = 3\sqrt{2}$

( ) $\frac{dT}{dt} = 6\sqrt{2}$

( ) $\frac{dT}{dt} = 12\sqrt{2}$

• **Questão 7** (1.0 ponto) Uma partícula de massa constante $m$ e velocidade $\vec{v}(t)$ é atraída para a origem pela ação exclusiva de uma força central dada por $\vec{F} = f(r)\hat{r}$. Mostre que o momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ é constante, isto é, $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$.

• **Questão 8** (3.0 pontos) Considere a superfície fechada orientada para fora composta superiormente pela superfície de rotação descrita como

$$z = f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

e inferiormente por

$$z = 0, \ x^2 + y^2 \leq 1.$$

Seja o campo vetorial dado por $\vec{F} = (2 + z^2 + x)\vec{k}$.

a) Calcule o valor do fluxo $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ via parametrização direta da superfície.

b) Calcule o valor do fluxo $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ via teorema da divergência.

c) Calcule o valor do fluxo $\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ via parametrização direta da superfície.