UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2019/1
Prova da área I

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Ponto extra: ( )Wikipédia ( )Apresentação ( )Nenhum **Tópico:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

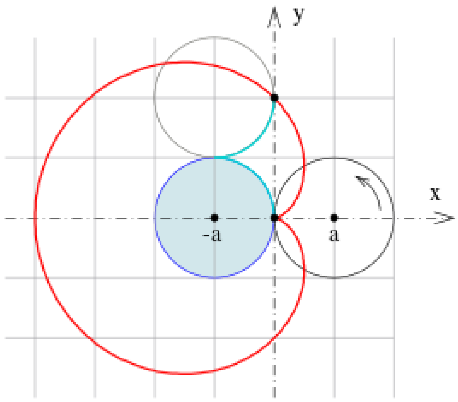
Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{\left(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right)\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Dados dois círculos no plano xy, um fixo e outro rolando sobre o primeiro, um ponto sobre o círculo rolante produz uma curva chamada cardioide. Considere a trajetória deste ponto parametrizada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $0 \le t < 2\pi$, onde a é uma constante e

$$x(t) = 2a(1-\cos(t))\cos(t) \ ,$$
$$y(t) = 2a(1-\cos(t))\,\mathrm{sen}(t) \ .$$



Supondo $a = 1$, assinale na primeira coluna o menor valor do parâmetro t para o qual $\vec{r}(t) = (-4, 0)$. Na segunda coluna assinale o vetor velocidade neste instante:

O parâmetro t:

( ) $\frac{\pi}{2}$

(x) π

( ) $\frac{3\pi}{2}$

( ) 2π

( ) $\frac{5\pi}{2}$

Velocidade:

( ) $2\vec{i}$

( ) $4\vec{i}$

( ) $6\vec{i}$

( ) $-2\vec{j}$

(x) $-4\vec{j}$

( ) $-6\vec{j}$

Item a:

Procuramos o menor valor positivo de t tal que:

$$x(t) = 2(1-\cos(t))\cos(t) = -4 \ ,$$
$$y(t) = 2(1-\cos(t))\,\mathrm{sen}(t) = 0.$$

Da segunda equação, temos que ou $\mathrm{sen}(t) = 0$ ou $\cos(t) = 1$. Como a primeira identidade é não-nula, precisamos que $\mathrm{sen}(t) = 0$, o que implica $\cos(t) = -1$, o que acontece pela primeira vez quando $t = \pi$.

Item b:

Basta diferenciar:

$$x'(t) = -2\,\mathrm{sen}(t) + 4\cos(t)\,\mathrm{sen}(t),$$
$$y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos^2(t) + 2\,\mathrm{sen}^2(t).$$

Portanto:

$$x'(\pi) = 0,$$
$$y'(\pi) = -4.$$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere a curva parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \mathrm{sen}(t)\vec{j} + \mathrm{sen}(2t)\vec{k}.$$

Assinale as alternativas que indicam respectivamente a curvatura em $t = \frac{\pi}{2}$ e torção em $t = \frac{\pi}{2}$:

Curvatura em $t = \frac{\pi}{2}$

(x) $\frac{1}{5}$

( ) $\frac{2}{5}$

( ) $\frac{3}{5}$

( ) $\frac{4}{5}$

( ) 1

( ) $\frac{6}{5}$

Torção em $t = \frac{\pi}{2}$

( ) $\frac{2}{5}$

( ) $\frac{4}{5}$

(X) $\frac{6}{5}$

( ) $\frac{8}{5}$

( ) 2

Primeiro diferenciamos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \mathrm{sen}(t)\vec{j} + \mathrm{sen}(2t)\vec{k} \\
\vec{r}'(t) &= -\mathrm{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + 2\cos(2t)\vec{k} \\
\vec{r}''(t) &= -\cos(t)\vec{i} - \mathrm{sen}(t)\vec{j} - 4\,\mathrm{sen}(2t)\vec{k} \\
\vec{r}'''(t) &= \mathrm{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} - 8\cos(2t)\vec{k}
\end{aligned}$$

Em $t = \pi/2$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}' &= -\vec{i} - 2\vec{k} \\
\vec{r}'' &= -\vec{j} \\
\vec{r}''' &= \vec{i} + 8\vec{k}
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\vec{r}' \times \vec{r}'' &= -2\vec{i} + \vec{k} \\
\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' &= 6
\end{aligned}$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
\kappa &= \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}^3} = \frac{1}{5} \\
\tau &= \frac{\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|} = \frac{6}{\sqrt{5}^2} = \frac{6}{5}.
\end{aligned}
$$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere a função vetorial dada por $\vec{r}(t) = \ln(1+t)\vec{i} + \sqrt{1-t}\vec{j}$. Assinale na primeira coluna o domínio de definição de $\vec{r}(t)$ e, na segunda, a declividade (coeficiente angular) da reta tangente à curva 2-D representada por ela no plano xy no ponto em que $t = 3/4$.

Domínio:

( ) $[-1, 1)$

( ) $[-1, 1]$

(x) $(-1, 1]$

( ) $(-1, 1)$

( ) Nenhuma das anteriores

Declividade:

( ) $-1/4$

( ) $-3/4$

( ) $-5/4$

(x) $-7/4$

( ) $-9/4$

Vide questões 1 e 4 da lista 1 da apostila.

Item b:

Derivamos:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= \frac{1}{1+t}\vec{i} - \frac{1}{2}(1-t)^{-1/2}\vec{j} \\ \vec{r}'(3/4) &= \frac{4}{7}\vec{i} - \vec{j}\end{aligned}$$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere o campo constante $\vec{F}(x, y, z) = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j}$ esboçado na figura ao lado e os caminhos C_1, C_2 e C_3 que começam no ponto $(-2, -2, 0)$ e terminam no ponto $(4, 4, 0)$. O caminho C_4 é a reta que liga o ponto $(-2, -2, 0)$ ao ponto $(4, 4, 4)$. Defina $W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $W_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $W_3 = \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $W_4 = \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Assinale as alternativas corretas:

( ) $0 = W_1 = W_2 = W_3$

(x) $0 < W_1 = W_2 = W_3$

( ) $0 < W_1 < W_2 = W_3$

( ) $0 = W_1 < W_2 < W_3$

( ) $0 = W_1 < W_2 = W_3$

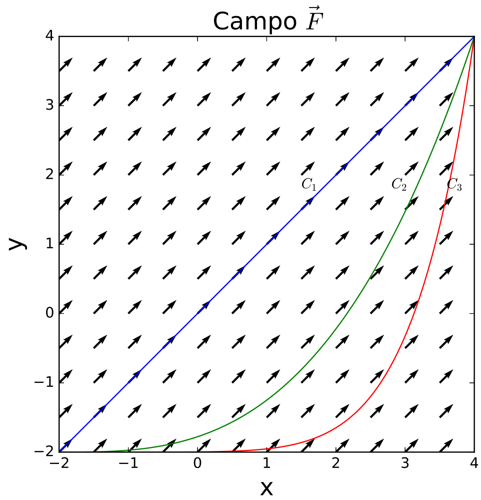
( ) $W_4 = \frac{1}{2}W_1$.

( ) $W_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}W_1$.

( ) $W_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}W_1$.

(x) $W_4 = W_1$.

( ) $W_4 = \sqrt{2}W_1$.



Item a: O campo é conservativo por ser constante. Por isso e porque os caminhos compartilham o primeiro e último pontos, a integral deve ser a mesma. Item b: Como o campo é conservativo, e o campo é perpendicular ao segmento (4,4,4)-(4,4,0), assim $W_1 = W_4$.

• **Questão 5** (1.0 ponto) Seja S a superfície no plano xy limitada pelos eixos x e y, pelas retas $x = e$ e $y = e$ e a hipérbole $xy = 1$. A superfície S é orientada no sentido positivo do eixo z e o caminho C é a curva que limita S orientada pela regra da mão direita. Seja $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ e $\vec{G} = \vec{\nabla}\|\vec{F}\|$.

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, os valores de $W_1 := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $W_2 := \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$.

W_1:
(x) -6
( ) -3
( ) 0
( ) 3
( ) 6

W_2:
( ) -6
( ) -3
(x) 0
( ) 3
( ) 6

Vide questão 5 da lista 0. Item a: Primeiro calculamos o rotacional do campo dado por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -2\vec{k}$$

e aplicamos o teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} W_1 &= \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_S -2\vec{k} \cdot \vec{k} dS \\ &= -2 \iint_S dS \end{aligned}$$

Aqui, S é a região limitada por C e a integral de 1 é a área da região. Assim:

$$\begin{aligned} W_1 &= -2 \iint_S dS \\ &= -2 \left(\int_0^{1/e} e dx + \int_{1/e}^{e} \frac{dx}{x} \right) \\ &= -2 \left(1 + \ln(e^2)\right) = -6 \end{aligned}$$

item b: A integral em caminho fechado de qualquer campo gradiente é zero.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Uma abelha se desloca em uma região onde a temperatura $T(x, y, z)$ é dada em kelvin pela expressão :

$$T(x, y, z) = 300 - 2(x^2 + y^2) - 2z + z^2.$$

O curioso inseto está no ponto $(1, 1, 1)$ e se desloca na direção de máxima taxa de variação da temperatura a uma velocidade de 3m/s. Assinale na primeira alternativa o vetor velocidade da abelha e, na segunda coluna, derivada temporal da temperatura em K/s.

Velocidade:
( ) $\vec{v} = -\frac{3}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$
( ) $\vec{v} = -\frac{3}{\sqrt{6}}\left(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\right)$
( ) $\vec{v} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$
( ) $\vec{v} = -\frac{3}{2}\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$
( ) $\vec{v} = -\frac{3}{2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$
(x) $\vec{v} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$

$\frac{dT}{dt}$:
( ) $\frac{dT}{dt} = 0$
( ) $\frac{dT}{dt} = \sqrt{2}$
( ) $\frac{dT}{dt} = 3\sqrt{2}$
( ) $\frac{dT}{dt} = 6\sqrt{2}$
(x) $\frac{dT}{dt} = 12\sqrt{2}$

Item a:

Sabemos que $\vec{v} = v\vec{T}$, onde a direção $\vec{T}$ de maior variação é dada por $\vec{T} = \frac{\vec{\nabla}T}{\|\vec{\nabla}T\|}$. A velocidade escalar v é dada igual a 3. Logo basta calcular o gradiente:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}T(x, y, z) &= -4x\vec{i} - 4y\vec{j} + (-2 + 2z)\vec{k}, \\ \vec{\nabla}T(1, 1, 1) &= -4\vec{i} - 4\vec{j}. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 3\frac{-4\vec{i} - 4\vec{j}}{4\sqrt{2}} \\ &= -\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j}\right). \end{aligned}$$

Item b: Supondo $\vec{r}$ a trajetória do inseto, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \vec{\nabla}T \cdot \vec{r}' \\ &= \left(-4\vec{i} - 4\vec{j}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)\right) \\ &= \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{12}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

Alternativamente, em termos do comprimento de arco s, temos:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt} = \|\vec{\nabla}T\|\|\vec{r}'\| = 3 \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

• **Questão 7** (1.0 ponto) Uma partícula de massa constante m e velocidade $\vec{v}(t)$ é atraída para a origem pela ação exclusiva de uma força central dada por $\vec{F} = f(r)\hat{r}$. Mostre que o momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ é constante, isto é, $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$.

Vide problema 3 da lista 4

Observe que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}' \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{v}' = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}.$$

Dos dados do exercício temos $m\vec{a} = \vec{F} = f(r)\hat{r}$, o que implica em

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times f(r)\hat{r}.$$

Como o produto vetorial entre dois vetores paralelos é zero, concluímos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0},$$

pois $\vec{v} // m\vec{v}$ e $\vec{r} // f(r)\hat{r}$.

• **Questão 8** (3.0 pontos) Considere a superfície fechada orientada para fora composta superiormente pela superfície de rotação descrita como

$$z = f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

e inferiormente por

$$z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 1.$$

Seja o campo vetorial dado por $\vec{F} = (2 + z^2 + x)\vec{k}$.

a) Calcule o valor do fluxo $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ via parametrização direta da superfície.

b) Calcule o valor do fluxo $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ via teorema da divergência.

c) Calcule o valor do fluxo $\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ via parametrização direta da superfície.

Item a: Seja S_1 a superfície cônica $z = f_1(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ e S_2 o disco $z = f_2(x, y) = 0,\ x^2 + y^2 \leq 1$. Para parametrizar S_1, considere a função $G_1(x, y, z) = z - 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$. Temos

$$\vec{\nabla} G_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} + \vec{k}$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &:= \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= \iint_A \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G_1 dA \\
&= \iint_A (2 + z^2 + x)\, dA \\
&= \iint_A \left(2 + (1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + x\right) dA
\end{aligned}$$

Resolvemos em coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(2 + (1 - r)^2 + r\cos(\theta)\right) r d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(3r - 2r^2 + r^3 + r^2\cos(\theta)\right) d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(3r - 2r^2 + r^3\right) dr + \int_0^1 \left(\left[r^2 \operatorname{sen}(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right) dr \\
&= 2\pi \left[3\frac{r^2}{2} - 2\frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4}\right]_0^1 \\
&= 2\pi \left[\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right]_0^1 = \frac{13\pi}{6}
\end{aligned}$$

Para parametrizar o disco $z = f_2(x, y) = 0,\ x^2 + y^2 \leq 1$, considere a função $G_2(x, y, z) = z$. Temos

$$\vec{\nabla} G_2 = \vec{k}$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &:= \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= -\iint_A \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G_2 dA \\
&= -\iint_A (2 + z^2 + x)\, dA \\
&= -\iint_A (2 + x)\, dA
\end{aligned}$$

Resolvemos em coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 + r\cos(\theta))\, r d\theta dr \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} (2r + r\cos(\theta))\, r d\theta dr \\
&= -2\pi \int_0^1 2r dr - \int_0^1 \left(\left[r^2 \operatorname{sen}(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right) dr \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

Portanto, $\Phi = \Phi_1 + \phi_2 = \frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6}$.

Item b: Temos $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2z$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r} 2zr dz d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r)^2 r d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^1 (1-r)^2 r dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(r - 2r^2 + r^3\right) dr \\
&= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - 2\frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4}\right]_0^1 \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Item c: Primeiro calculamos o rotacional: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{j}$. Usamos f_1, f_2, G_1 e G_2 calculados no item a). Assim,

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &:= \iint_{S_1} (-\vec{j}) \cdot \vec{n} dS \\
&= \iint_A (-\vec{j}) \cdot \vec{\nabla} G_1 dA \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta) r d\theta dr \\
&= 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &:= \iint_{S_2} (-\vec{j}) \cdot \vec{n} dS \\
&= \iint_A (-\vec{j}) \cdot \vec{\nabla} G_1 dA \\
&= \iint_A 0 dA \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto, $\Phi = \Phi_1 + \phi_2 = 0$.