UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2019/1
Prova da área I

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Ponto extra: ( )Wikipédia ( )Apresentação ( )Nenhum **Tópico:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec\nabla$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec F = \vec F(x,y,z)$ e $\vec G = \vec G(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec\nabla(f+g) = \vec\nabla f + \vec\nabla g$
2.	$\vec\nabla\cdot\left(\vec F+\vec G\right) = \vec\nabla\cdot\vec F + \vec\nabla\cdot\vec G$
3.	$\vec\nabla\times\left(\vec F+\vec G\right) = \vec\nabla\times\vec F + \vec\nabla\times\vec G$
4.	$\vec\nabla(fg) = f\vec\nabla g + g\vec\nabla f$
5.	$\vec\nabla\cdot\left(f\vec F\right) = \left(\vec\nabla f\right)\cdot\vec F + f\left(\vec\nabla\cdot\vec F\right)$
6.	$\vec\nabla\times\left(f\vec F\right) = \vec\nabla f\times\vec F + f\vec\nabla\times\vec F$
7.	$\vec\nabla\cdot\vec\nabla f = \vec\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec\nabla\times\left(\vec\nabla f\right) = 0$
9.	$\vec\nabla\cdot\left(\vec\nabla\times\vec F\right) = 0$
10.	$\vec\nabla\times\left(\vec\nabla\times\vec F\right) = \vec\nabla\left(\vec\nabla\cdot\vec F\right) - \vec\nabla^2\vec F$
11.	$\vec\nabla\cdot\left(\vec F\times\vec G\right) = G\cdot\left(\vec\nabla\times\vec F\right) - F\cdot\left(\vec\nabla\times\vec G\right)$
12.	$\vec\nabla\times\left(\vec F\times\vec G\right) = \left(\vec G\cdot\vec\nabla\right)\vec F - \vec G\left(\vec\nabla\cdot\vec F\right) - \left(\vec F\cdot\vec\nabla\right)\vec G + \vec F\left(\vec\nabla\cdot\vec G\right)$
13.	$\vec\nabla\left(\vec F\cdot\vec G\right) = \left(\vec G\cdot\vec\nabla\right)\vec F + \left(\vec F\cdot\vec\nabla\right)\vec G + \vec F\times\left(\vec\nabla\times\vec G\right) + \vec G\times\left(\vec\nabla\times\vec F\right)$
14.	$\vec\nabla\varphi(r) = \varphi'(r)\hat r$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\frac{d\vec T}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec T}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec r'(t)\times\vec r''(t)\Vert}{\Vert\vec r'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec B}{ds}\cdot\vec N = \frac{\left(\vec r'(t)\times\vec r''(t)\right)\cdot\vec r'''(t)}{\Vert\vec r'(t)\times\vec r''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec B}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec B}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec a\times\vec v\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec a\cdot\vec v}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\frac{d\vec T}{ds} = \kappa\vec N$$
$$\frac{d\vec N}{ds} = -\kappa\vec T + \tau\vec B$$
$$\frac{d\vec B}{ds} = -\tau\vec N$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Seja o campo vetorial conservativo $\vec{F}(x,y,z) = ye^z\vec{i} + xe^z + xye^z$, o campo escalar $\psi(x,y,z) = y^4 + xz$ e $\vec{G} = \vec{F} + \vec{\nabla}\psi$. Assinale na primeira coluna um potencial φ para $\vec{F}$ e na segunda alternativa o valor de $W := \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Onde C é curva parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = 2^t\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}, \quad 0 \le t \le 1.$$

O potencial φ:

( ) $\varphi(x,y,z) = ye^z + C$

( ) $\varphi(x,y,z) = xe^z + C$

( ) $\varphi(x,y,z) = zye^x + C$

( ) $\varphi(x,y,z) = xze^y + C$

( ) $\varphi(x,y,z) = xye^z + C$

W :

( ) $2\,(1+e)$

( ) 4

( ) $2+e$

( ) 2

( ) $2e$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere o campo radial $\vec{F}(x,y,z) = \hat{r}$ esboçado na figura ao lado e os caminhos C_1, a reta que liga o ponto $(-3,-3,0)$ ao ponto $(3,3,0)$, a circunferênia C_2 e a elípse C_3 orientadas no sentido anti-horário. Defina:

$$W_1 = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

$$W_2 = \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

$$W_3 = \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

Assinale as alternativas corretas em cada uma das duas colunas:

( ) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \dfrac{3}{r}$

( ) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \dfrac{2}{r}$

( ) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$

( ) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 2 + 4r$

( ) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 2 + r$

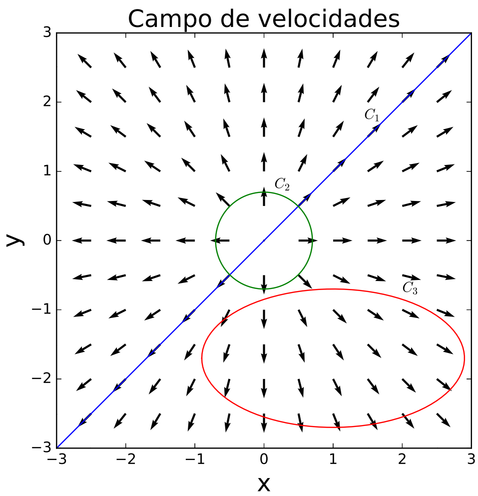
( ) $0 = W_2 = W_3 < W_1$

( ) $0 = W_2 < W_3 < W_1$

( ) $0 = W_2 = W_3 = W_1$

( ) $0 < W_1 < W_2 < W_3$

( ) $W_1 < 0 = W_2 < W_3$



• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere a curva parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + \cos(2t)\vec{k}.$$

Assinale as alternativas que indicam corretamente a curvatura em $t = 0$ e torção em $t = 0$:

Curvatura em $t = 0$

- ( ) 5
- ( ) $\sqrt{11}$
- ( ) 11
- ( ) 17
- ( ) 17^2
- ( ) $\sqrt{17}$

Torção em $t = 0$

- ( ) $-\sqrt{17}$
- ( ) -17
- ( ) 17^2
- ( ) $\sqrt{11}$
- ( ) 0
- ( ) 11

• **Questão 4** (1.0 ponto) A posição de uma partícula é dada pela função vetorial $\vec{r}(t) = (1+t)^{3/2}\vec{i} + (1-t)^{3/2}\vec{j}$, que descreve uma curva chamada astróide. Assinale na primeira coluna o domínio de definição de $\vec{r}(t)$ e, na segunda, a distância percorrida (comprimento de arco) ao longo de todo o domínio.

Domínio:

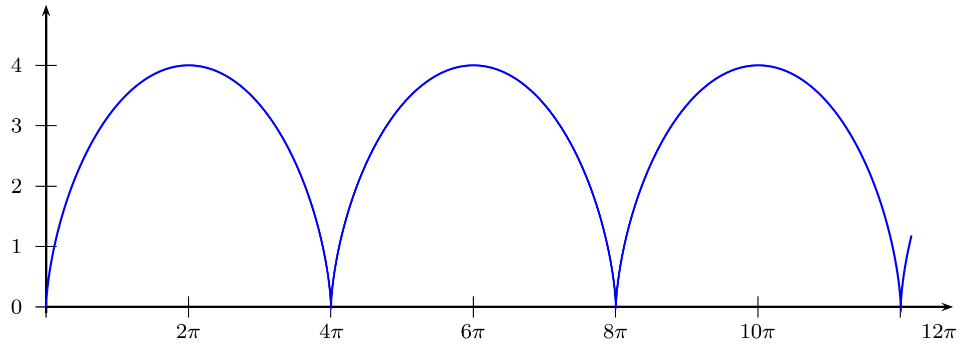
- ( ) $(-1, 1]$
- ( ) $[-1, 1)$
- ( ) $[-1, 1]$
- ( ) $(-1, 1)$
- ( ) Nenhuma das anteriores

Distância percorrida:

- ( ) $\sqrt{2}$
- ( ) $\sqrt{3}$
- ( ) 3
- ( ) $3\sqrt{2}$
- ( ) $3\sqrt{3}$

Questão 5 (1.0 ponto) O cicloide é uma curva definida por um ponto sobre uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta. Considere a trajetória deste ponto parametrizada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $t > 0$, onde r é uma constante e

$$x(t) = R(t - \text{sen}(t))$$
$$y(t) = R(1 - \cos(t)).$$



Supondo $R = 2$, assinale na primeira coluna o valor do parâmetro t para o qual $\vec{r}(t) = (\pi - 2, 2)$. Na segunda coluna assinale o vetor velocidade neste instante:

O parâmetro t:

( ) $\frac{\pi}{2}$

( ) π

( ) $\frac{3\pi}{2}$

( ) 2π

( ) $\frac{5\pi}{2}$

Velocidade:

( ) $4\vec{i} + 2\vec{j}$

( ) $2\vec{i} + 2\vec{j}$

( ) $4\vec{i} + 4\vec{j}$

( ) $2\vec{i}$

( ) $2\vec{j}$

( ) $4\vec{i}$

• **Questão 6** (1.0 ponto) Seja S a superfície no plano xy limitada pelos eixos x e y e pelo arco de circunferência de raio 4 centrado na origem restrito ao primeiro quadrante. A superfície S é orientada no sentido positivo do eixo z e o caminho C é a curva que limita S orientada pela regra da mão direita. Seja $\vec{F} = x^3\vec{i} + x^3\vec{j}$ e $\vec{G} = \vec{\nabla}\|\vec{F}\|$.

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, os valores de $W_1 := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $W_2 := \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$.

W_1:

( ) -12π

( ) 0π

( ) 12π

( ) 24π

( ) 48π

W_2:

( ) -6

( ) -3

( ) 0

( ) 3

( ) 6

- **Questão 7** (2.0 ponto) Dada uma função escalar $f(r)$ onde $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

  a) Use a regra da cadeia para obter a fórmula do gradiente de $f(r)$ dada por

  $$\vec{\nabla} f(r) = f'(r)\hat{r}.$$

  b) Use, nesta ordem, a definição de laplaciano de uma função escalar, depois o resultado do item anterior e, finalmente, a tabela de fórmulas do operador $\vec{\nabla}$ para obter a seguinte fórmula:

  $$\vec{\nabla}^2 f(r) = 2\frac{f'(r)}{r} + f''(r).$$

• **Questão 8** (2.0 pontos) Considere a superfície fechada orientada para fora composta superiormente pela superfície de rotação descrita como

$$z = f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2), \quad z > 0$$

e inferiormente por:

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Seja o campo vetorial dado por $\vec{F} = x^3\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$. Calcule o valor do fluxo

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$