UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2019/1
Prova da área I

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Ponto extra: ( )Wikipédia ( )Apresentação ( )Nenhum **Tópico:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{\left(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right)\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Seja o campo vetorial conservativo $\vec{F}(x,y,z) = ye^z\vec{i} + xe^z + xye^z$, o campo escalar $\psi(x,y,z) = y^4 + xz$ e $\vec{G} = \vec{F} + \vec{\nabla}\psi$. Assinale na primeira coluna um potencial φ para $\vec{F}$ e na segunda alternativa o valor de $W := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Onde C é curva parametrizada por:

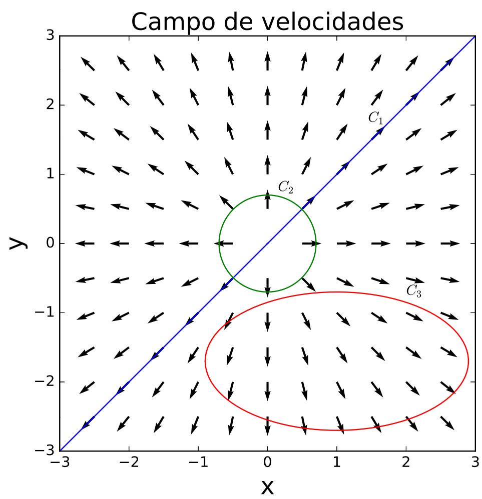
$$\vec{r}(t) = 2^t\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}, \quad 0 \le t \le 1.$$

O potencial φ:	W :
( ) $\varphi(x,y,z) = ye^z + C$	( ) $2(1+e)$
( ) $\varphi(x,y,z) = xe^z + C$	( ) 4
( ) $\varphi(x,y,z) = zye^x + C$	( ) $2+e$
( ) $\varphi(x,y,z) = xze^y + C$	( ) 2
(x) $\varphi(x,y,z) = xye^z + C$	( ) $2e$

Item 1b anulado. R: $2e+3$.

A solução do item b poderia ser obtida rapidamente por ser conservativo: $\vec{G} = \vec{\nabla}(\varphi+\psi) = \vec{\nabla}(xye^z + y^4 + xz)$. Assim $W = (xye^z + y^4 + xz)\big|_{(1,0,0)}^{(2,1,1)}$.

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere o campo radial $\vec{F}(x,y,z) = \hat{r}$ esboçado na figura ao lado e os caminhos C_1, a reta que liga o ponto $(-3,-3,0)$ ao ponto $(3,3,0)$, a circunferência C_2 e a elípse C_3 orientadas no sentido anti-horário. Defina:



$$W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$
$$W_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$
$$W_3 = \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

Assinale as alternativas corretas em cada uma das duas colunas:

( ) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{3}{r}$	( ) $0 = W_2 = W_3 < W_1$
(x) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{2}{r}$	( ) $0 = W_2 < W_3 < W_1$
( ) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$	(x) $0 = W_2 = W_3 = W_1$
( ) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 2+4r$	( ) $0 < W_1 < W_2 < W_3$
( ) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 2+r$	( ) $W_1 < 0 = W_2 < W_3$

Item a:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{F} &= \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\\ &= \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{r} + \left(\frac{1}{r}\right)\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\\ &= -\frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot\vec{r} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}\end{aligned}$$

Onde se usaram os itens 5 e 14 da tabela.

Item b: Como o campo é radial, é conservativo, pelo que $W_2 = W_3 = 0$. Já $W_1 = 0$ pela simetria impar ao longo do segmento de reta.

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere a curva parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + \cos(2t)\vec{k}.$$

Assinale as alternativas que indicam corretamente a curvatura em $t = 0$ e torção em $t = 0$:

Curvatura em $t = 0$

( ) 5

( ) $\sqrt{11}$

( ) 11

( ) 17

( ) 17^2

(x) $\sqrt{17}$

Torção em $t = 0$

( ) $-\sqrt{17}$

( ) -17

( ) 17^2

( ) $\sqrt{11}$

(x) 0

( ) 11

Primeiro derivamos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + \cos(2t)\vec{k} \\
\vec{r}'(t) &= -\text{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} - 2\,\text{sen}(2t)\vec{k} \\
\vec{r}''(t) &= -\cos(t)\vec{i} - \text{sen}(t)\vec{j} - 4\cos(2t)\vec{k} \\
\vec{r}'''(t) &= \text{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + 8\,\text{sen}(2t)\vec{k}
\end{aligned}$$

Para $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(0) &= \vec{j} \\
\vec{r}''(0) &= -\vec{i} - 4\vec{k} \\
\vec{r}'''(0) &= -\vec{j}
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) &= \vec{j} \times \left(-\vec{i} - 4\vec{k}\right) = \vec{k} - 4\vec{i} \\
\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) \cdot \vec{r}'''(0) &= \left(\vec{k} - 4\vec{i}\right) \cdot (-\vec{j}) = 0
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
k(0) &= \frac{\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\|}{\|\vec{r}'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{1+4^2}}{1} = \sqrt{17} \\
\tau(0) &= \frac{\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) \cdot \vec{r}'''(0)}{\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\|^2} = 0
\end{aligned}$$

• **Questão 4** (1.0 ponto) A posição de uma partícula é dada pela função vetorial $\vec{r}(t) = (1+t)^{3/2}\vec{i} + (1-t)^{3/2}\vec{j}$, que descreve uma curva chamada astróide. Assinale na primeira coluna o domínio de definição de $\vec{r}(t)$ e, na segunda, a distância percorrida (comprimento de arco) ao longo de todo o domínio.

Domínio:

( ) $(-1, 1]$

( ) $[-1, 1)$

(x) $[-1, 1]$

( ) $(-1, 1)$

( ) Nenhuma das anteriores

Distância percorrida:

( ) $\sqrt{2}$

( ) $\sqrt{3}$

( ) 3

(x) $3\sqrt{2}$

( ) $3\sqrt{3}$

A distância é dada por:

$$\begin{aligned}
D &= \int_{-1}^{1} \frac{ds}{dt} dt \qquad (1) \\
&= \int_{-1}^{1} \|\vec{r}(t)\| dt \qquad (2) \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2} \int_{-1}^{1} dt = 3\sqrt{2} \qquad (3) \\
& \qquad (4)
\end{aligned}$$

onde se usou:

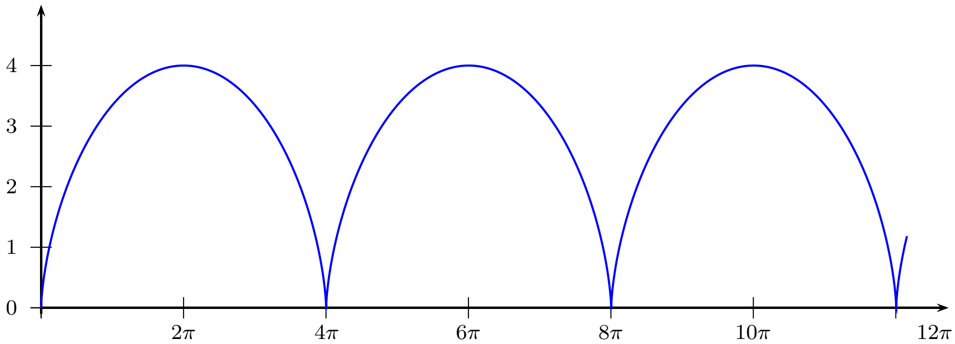
$$\vec{r}(t) = (1+t)^{3/2}\vec{i} + (1-t)^{3/2}\vec{j} \qquad (5)$$

$$\vec{r}'(t) = \frac{3}{2}(1+t)^{1/2}\vec{i} - \frac{3}{2}(1-t)^{1/2}\vec{j} \qquad (6)$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \frac{3}{2}\sqrt{(1+t) + (1-t)} = \frac{3}{2}\sqrt{2}. \qquad (7)$$

Questão 5 (1.0 ponto) O cicloide é uma curva definida por um ponto sobre uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta. Considere a trajetória deste ponto parametrizada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $t > 0$, onde r é uma constante e

$$x(t) = R(t - \operatorname{sen}(t))$$
$$y(t) = R(1 - \cos(t)).$$



Supondo $R = 2$, assinale na primeira coluna o valor do parâmetro t para o qual $\vec{r}(t) = (\pi - 2, 2)$. Na segunda coluna assinale o vetor velocidade neste instante:

O parâmetro t:

(x) $\frac{\pi}{2}$

( ) π

( ) $\frac{3\pi}{2}$

( ) 2π

( ) $\frac{5\pi}{2}$

Velocidade:

( ) $4\vec{i} + 2\vec{j}$

(x) $2\vec{i} + 2\vec{j}$

( ) $4\vec{i} + 4\vec{j}$

( ) $2\vec{i}$

( ) $2\vec{j}$

( ) $4\vec{i}$

Vide exemplo 12 página 3/6

item a:
Precisamos encontrar o menor valor de t positivo tal que:

$$t - \operatorname{sen}(t) = \frac{\pi}{2} - 1$$
$$1 - \cos(t) = 1.$$

Como $\cos(t) = 0$, temos que $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Inspeção direta nos mostra que $t = \frac{\pi}{2}$ é solução.

item b:

$$x'(t) = R(1 - \cos(t))$$
$$y'(t) = R\operatorname{sen}(t).$$

Assim, em $t = \frac{\pi}{2}$, vale:

$$x'(t) = 2$$
$$y'(t) = 2.$$

• **Questão 6** (1.0 ponto) Seja S a superfície no plano xy limitada pelos eixos x e y e pelo arco de circunferência de raio 4 centrado na origem restrito ao primeiro quadrante. A superfície S é orientada no sentido positivo do eixo z e o caminho C é a curva que limita S orientada pela regra da mão direita. Seja $\vec{F} = x^3\vec{i} + x^3\vec{j}$ e $\vec{G} = \vec{\nabla}\|\vec{F}\|$.

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, os valores de $W_1 := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $W_2 := \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$.

W_1:

( ) -12π

( ) 0π

( ) 12π

( ) 24π

(x) 48π

W_2:

( ) -6

( ) -3

(x) 0

( ) 3

( ) 6

Vide questão 4 da lista 0.

Item a: Primeiro calculamos o rotacional do campo dado por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 3x^2\vec{k}$$

e aplicamos o teorema de Stokes:

$$
\begin{aligned}
W &= \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= \int_S 3x^2 \vec{k} \cdot \vec{k} dS \\
&= 3 \int_S x^2 dS
\end{aligned}
$$

Parametrizando em polares, temos:

$$
\begin{aligned}
W &= 3 \int_S x^2 dS \\
&= 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \rho^2 \cos^2(\theta) \rho d\rho d\theta \\
&= 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \rho^3 \cos^2(\theta) d\rho d\theta \\
&= 3 \left(\int_0^4 \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta \right) \\
&= 34^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right) d\theta \\
&= 96 \left(\theta + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\
&= 48\pi
\end{aligned}
$$

item b: A integral em caminho fechado de qualquer campo gradiente é zero.

- **Questão 7** (2.0 ponto) Dada uma função escalar $f(r)$ onde $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

  a) Use a regra da cadeia para obter a fórmula do gradiente de $f(r)$ dada por

  $$\vec{\nabla} f(r) = f'(r)\hat{r}.$$

  b) Use, nesta ordem, a definição de laplaciano de uma função escalar, depois o resultado do item anterior e, finalmente, a tabela de fórmulas do operador $\vec{\nabla}$ para obter a seguinte fórmula:

  $$\vec{\nabla}^2 f(r) = 2\frac{f'(r)}{r} + f''(r).$$

  Ver itens 9 e 11 da lista 3.

• **Questão 8** (2.0 pontos) Considere a superfície fechada orientada para fora composta superiormente pela superfície de rotação descrita como

$$z = f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2), \quad z > 0$$

e inferiormente por:

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Seja o campo vetorial dado por $\vec{F} = x^3\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$. Calcule o valor do fluxo

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Primeiro calculamos o divergente de $\vec{F}$ dado por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3x^2$$

E aplicamos o teorema da divergência paremetizando a região em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\rho^2} \rho^2 \cos^2(\theta) \rho dz d\rho d\theta \\
&= 3 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \right) \left(\int_0^1 \int_0^{1-\rho^2} \rho^3 dz d\rho \right) \\
&= \frac{3}{2} \left(\int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta)) \, d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^3 (1 - \rho^2) d\rho \right) \\
&= \frac{3}{2} (2\pi) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$