UFRGS – Instituto de Matemática e Estatística
Depto. de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 – Matemática Aplicada II – Turma D
1ª Avaliação – 17 de abril de 2019

Questão 1 *(1,2 pontos)***.** Um corpo descreve uma trajetória com vetor posição $r(t) \coloneqq 3\cos(\theta(t))\,\mathbf{i} - 6\sin(\theta(t))\,\mathbf{j}$, onde θ é uma função continuamente diferenciável e crescente ($\theta'>0$). Dado que a norma da velocidade desse corpo é constante e igual a 30, escolha a alternativa com o intervalo de valores que $\theta'(t)$ assume. Obs.: utilize o fato de que se $f(t) = a\sin^2(t) + b\cos^2(t)$, então $\min\{a,b\} \le f(t) \le \max\{a,b\}$.
R.: A partir da definição

$$r'(t) = -3\sin(\theta(t))\,\theta'(t)\mathbf{i} - 6\cos(\theta(t))\,\theta'(t)\mathbf{j}$$

e

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\theta\text{'}(\mathrm{t})^2\left(9\sin^2\theta(t) + 36\cos^2\theta(t)\right)}.$$

A função $\theta(t)$ é crescente, $\theta'(t) > 0$, e portanto $|\theta'(t)| = \theta'(t)$. Assim,

$$\theta'(t) = \frac{30}{\sqrt{9\sin^2\theta(t) + 36\cos^2\theta(t)}},$$

o que implica

$$5 \le \theta'(t) \le 10.$$

Questão 2 *(1,2 pontos)***.** O campo elétrico gerado por uma distribuição espacial de carga é dado por

$$E(x,y,z) = h\left(x^2+y^2+z^2\right)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

A equação de Maxwell $div(E) = 4\pi\rho$ permite determinar a carga contida em uma região U a partir da integral $\iiint_U \rho(r)d^3r$. Escolha a alternativa que corresponde à carga contida em uma bola de raio 2 com centro na origem:
R.: A partir do teorema da divergência, se U é a bola de raio 2 e centro na origem, $B(0,2)$, e S a superfície esférica dada pela sua fronteira, então supondo que h é continuamente diferenciável em todo o domínio

$$\iiint_{B(0,2)} \rho(r)\,d^3r = \frac{1}{4\pi}\iiint_{B(0,2)} div(E)\,d^3r = \frac{1}{4\pi}\oiint_S E\cdot n\,d^2r.$$

A normal em um ponto r da superfície S é dada por

$$n(r) = r/\|r\| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Isto permite determinar a integral de superfície de maneira simples:

$$\begin{aligned}\iiint_{B(0,2)} \rho(r)\,d^3r &= \frac{1}{4\pi}\oiint_S h\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d^2r,\\ &= \frac{1}{4\pi}h\left(r^2\right)\sqrt{r^2}\oiint_S d^2r,\\ &= \frac{1}{4\pi}r\,h\left(r^2\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\sin(\theta)d\theta d\phi,\\ &= \frac{1}{4\pi}r\,h\left(r^2\right)4\pi r^2 = r^3 h\left(r^2\right).\end{aligned}$$

Questão 3 *(1,2 pontos)***.** Uma curva C possui vetor posição dado por

$$r(t) = -\frac{1}{2}\sin(t)\mathbf{i} + \frac{1}{4}\left(2\cos(t) - 3\sin(t)\right)\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\cos(t) + \sin(t)\right)\mathbf{k}.$$

Dadas as seguintes sentenças:

I) o movimento não está restrito a um plano;

II) a curvatura é nula pois o movimento está restrito a um plano;

III) a parametrização de C em termos do comprimento de arco s é dada por $\gamma(s) = r(s)$.

É correto afirmar que:

R.: Nessa trajetória,

$$r'(t) = -\frac{1}{2}\cos(t)\mathbf{i} - \frac{1}{4}\left(2\sin(t) + 3\cos(t)\right)\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sin(t) - \cos(t)\right)\mathbf{k},$$

e

$$\|r'(t)\| = 1.$$

Assim, a relação entre tempo e comprimento de arco dada pela função l satisfaz

$$s = l(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} \|r'(t)\|\, dt = t,$$

ou seja, $\gamma(s) = r \circ l^{-1}(s) = r(s)$.

II) é falsa. A curvatura é dada por $\|T'\|$, como $T(s) = \gamma'(s)$, então

$$T'(s) = \gamma''(s) = -r(s)$$

portanto, $\|T'\| = 1$.

I) é falsa. $\tau = -B' \cdot N$, onde $N = T'/\|T'\|$ e $B = T \times N$. Assim,

$$N(s) = -r(s)$$

e

$$\begin{aligned} B(s) &= r'(s) \times (-r(s)), \\ &= \frac{1}{4}\left(2\sqrt{3}\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right). \end{aligned}$$

Como B é constante, a torção é nula e portanto o movimento está restrito a um plano.

Questão 4 *(1,2 pontos)***.** Sejam as funções continuamente diferenciáveis $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e o campo vetorial $F(x, y, z) = h(x)\mathbf{i} + f(z)\mathbf{j} + g(y)\mathbf{k}$. Escolha a alternativa que corresponde ao produto escalar $div(F \times \mathbf{j})$:

R.: A partir da definição,

$$F \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ h(x) & f(z) & g(y) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -g(y)\mathbf{i} + h(x)\mathbf{k}$$

e assim,

$$\begin{aligned} div(F \times \mathbf{j}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-g(y)\right) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h(x)\right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Questão 5 *(1,2 pontos)***.** Sejam respectivamente v e a as derivadas primeira e segunda da função vetorial parametrização de uma curva. Dadas as seguintes sentenças:

I) se $v \times a$ permanece constante, então a curva está contida em um plano;

II) se a norma da componente normal da aceleração, a_N for proporcional a $\|v\|^2$, a curvatura será constante;
III) se v e a são colineares, então $\|v\|$ é constante.
É correto afirmar que:
R.: III) é falsa, se a e v forem ortogonais, então $\|v\|$ é constante.

Questão 6 *(1,2 pontos)***.** Sejam os campos vetoriais E e B, respectivamente os campos elétrico e magnético, e o vetor de Poynting dado por $S = \dfrac{c}{4\pi} E \times B$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. A partir da equações de Maxwell

$$div(E) = 4\pi\rho, \qquad div(B) = 0,$$
$$curl(E) = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad curl(B) = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t},$$

(ρ é a função escalar densidade de carga e J a função vetorial densidade de corrente) considere as sentenças:
I) se J for irrotacional, então B satisfaz a equação de onda $\dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \Delta B$;
II) o rotacional de E é um campo solenoidal devido à equação da continuidade para carga;
III) se S for solenoidal então $\|E\|^2 + \|B\|^2$ é constante no tempo.
É correto afirmar que:
R.: II) é falsa pois o rotacional de um campo vetorial diferenciável é sempre solenoidal.
III) é falsa pois $div\,(S) = \dfrac{c}{4\pi} div\,(E \times B) = \dfrac{c}{4\pi}\left(B \cdot curl(E) - E \cdot curl(B)\right) = -\dfrac{1}{4\pi}\left(B \cdot \dfrac{\partial B}{\partial t} + E \cdot \dfrac{\partial E}{\partial t}\right) - J \cdot E.$, ou seja, se $div(S) = 0$, então $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\|E\|^2 + \|B\|^2\right) = -8\pi J \cdot E$, uma vez que $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\|E\|^2 + \|B\|^2\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(E \cdot E + B \cdot B\right) = 2\left(B \cdot \dfrac{\partial B}{\partial t} + E \cdot \dfrac{\partial E}{\partial t}\right)$.

Questão 7 *(1,2 pontos)***.** Escolha a alternativa que corresponde ao vetor unitário que aponta na direção de maior crescimento do campo escalar $\Phi(x, y, z) := xy\cos(xz)$ no ponto de coordenadas $(\pi, 1, 1)$:
R.: A partir da definição,

$$\nabla\Phi(x, y, z) = \left(y\cos(xz) - xyz\,\text{sen}(xz)\right)\mathbf{i} + x\cos(xz)\mathbf{j} - x^2 y\,\text{sen}(xz)\mathbf{k}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\nabla\Phi(\pi, 1, 1) &= \left(\cos(\pi) - \pi\,\text{sen}(\pi)\right)\mathbf{i} + \pi\cos(\pi)\mathbf{j} - \pi^2\text{sen}(\pi)\mathbf{k},\\ &= -\mathbf{i} - \pi\mathbf{j}.\end{aligned}$$

A direção de maior crescimento de Φ é dada por $\dfrac{grad(\Phi)}{\|grad(\Phi)\|}$, portanto no ponto de coordenadas $(\pi, 1, 1)$ a direção de maior crescimento é igual a

$$(-\mathbf{i} - \pi\mathbf{j}) \cdot \left(1 + \pi^2\right)^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2}}\left(\mathbf{i} + \pi\mathbf{j}\right)$$

Questão 8 *(1,2 pontos)***.** Seja o campo vetorial $F(x, y, z) := y\,z\mathbf{i} + x\,z\mathbf{j} + x\,y\mathbf{k}$. Assinale a alternativa que corresponde ao valor da integral de linha $\int_C F \cdot dr$ onde C é a curva formada pela união dos segmentos de reta entre os pontos de coordenada $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ e $(1, 1, 2)$ (nessa mesma sequência):
R.: F é conservativa ($\nabla \times F = \mathbf{0}$), portanto existe um campo escalar $\Phi(x, y, z)$ tal que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = y\,z, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = x\,z \quad \text{e} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = x\,y.$$

A partir da primeira derivada, $\Phi(x, y, z) = x\,y\,z + f(y, z)$, agora tomando a derivada parcial em y e comparando com a segunda expressão acima, concluímos que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ e portanto, $f(y, z) = g(z)$. Finalmente tomado a derivada parcial de com relação a z e comparando com a útlima expressão acima, concluímos que g é uma constante. Portanto

$$\Phi(x,y,z) = x\,y\,z + K,$$

K constante. Como F é conservativo, a sua integral depende apenas dos valores de Φ extremidades da curva,

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \Phi(1,1,2) - \Phi(0,0,0)\\ &= 2 + K - (0 + K)\\ &= 2\end{aligned}$$

Questão 9 *(1,2 pontos)***.** Seja o campo vetorial $F(x,y,z) = (x^2 + y)\mathbf{i} + x\,y\mathbf{j} - x\,y\,z\mathbf{k}$ e S um quadrado com vértices em $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$. Escolha a opção com o fluxo de $curl(F)$ por S com a normal orientada a partir da sequência de vértices indicada no texto:
R.: De acordo com a sequência de vértices, a normal é $-\mathbf{k}$. basta calcular a componente de $curl(F)$ nessa direção. O campo vetorial n é constante e igual a $\mathbf{k}$ na superfície S e a componente do rotacional de F nessa direção é dada por

$$\left(curl(F)\right)_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial (xy)}{\partial x} - \frac{\partial\left(x^2 + y\right)}{\partial y} = y - 1,$$

então

$$\begin{aligned}\iint_S curl(F) \cdot n d^2 r &= \int_0^1 \int_0^1 (y-1)(-1) dy dx,\\ &= -\int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_{y=0}^{y=1} dx,\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Questão 10 *(1,2 pontos)***.** Seja o campo vetorial $F(x,y,z) = x\cos(y)\mathbf{i} - \dfrac{x^2}{2}\sin(y)\mathbf{j} + x\,z^2\mathbf{k}$. Assinale a alternativa com o valor correto para a integral de linha $\oint_C F \cdot dr$, onde C é o círculo de raio 3, disposto no plano $z = 1$ com centro em $(0,0,1)$ e orientado no sentido anti-horário:
R.: A função F é continuamente diferenciável em todo $\mathbb{R}^3$ e C é uma curva fechada simples por partes que delimita uma superfície orientável S , então a integral de linha pode ser calculada a partir do teorema de Stokes,

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S curl(F).n\, d^2 r.$$

O rotacional do campo satisfaz

$$curl(F) = -z^2\mathbf{j}$$

e a superfície S é o disco circular de raio r no plano $z = 3$, orientado no sentido anti-horário, portanto $n = \mathbf{k}$. Neste caso,

$$curl(F) \cdot n = 0$$

e a integral vale zero.
