UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2019/2
Prova da área I

1-5	6	7	Total

Nome: ________________________________ **Cartão:** ______________

Ponto extra: ( )Wikipédia ( )Apresentação ( )Nenhum **Tópico:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec\nabla$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec F = \vec F(x,y,z)$ e $\vec G = \vec G(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec\nabla(f+g) = \vec\nabla f + \vec\nabla g$
2.	$\vec\nabla \cdot \left(\vec F + \vec G\right) = \vec\nabla\cdot\vec F + \vec\nabla\cdot\vec G$
3.	$\vec\nabla \times \left(\vec F + \vec G\right) = \vec\nabla\times\vec F + \vec\nabla\times\vec G$
4.	$\vec\nabla(fg) = f\vec\nabla g + g\vec\nabla f$
5.	$\vec\nabla\cdot\left(f\vec F\right) = \left(\vec\nabla f\right)\cdot\vec F + f\left(\vec\nabla\cdot\vec F\right)$
6.	$\vec\nabla\times\left(f\vec F\right) = \vec\nabla f\times\vec F + f\vec\nabla\times\vec F$
7.	$\vec\nabla\cdot\vec\nabla f = \vec\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec\nabla\times\left(\vec\nabla f\right) = 0$
9.	$\vec\nabla\cdot\left(\vec\nabla\times\vec F\right) = 0$
10.	$\vec\nabla\times\left(\vec\nabla\times\vec F\right) = \vec\nabla\left(\vec\nabla\cdot\vec F\right) - \vec\nabla^2\vec F$
11.	$\vec\nabla\cdot\left(\vec F\times\vec G\right) = G\cdot\left(\vec\nabla\times\vec F\right) - F\cdot\left(\vec\nabla\times\vec G\right)$
12.	$\vec\nabla\times\left(\vec F\times\vec G\right) = \left(\vec G\cdot\vec\nabla\right)\vec F - \vec G\left(\vec\nabla\cdot\vec F\right) - \left(\vec F\cdot\vec\nabla\right)\vec G + \vec F\left(\vec\nabla\cdot\vec G\right)$
13.	$\vec\nabla\left(\vec F\cdot\vec G\right) = \left(\vec G\cdot\vec\nabla\right)\vec F + \left(\vec F\cdot\vec\nabla\right)\vec G + \vec F\times\left(\vec\nabla\times\vec G\right) + \vec G\times\left(\vec\nabla\times\vec F\right)$
14.	$\vec\nabla\varphi(r) = \varphi'(r)\hat r$

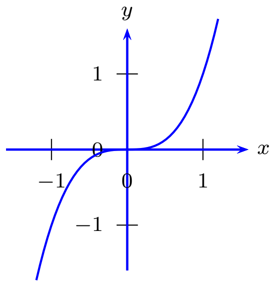
Curvatura, torção e aceleração:

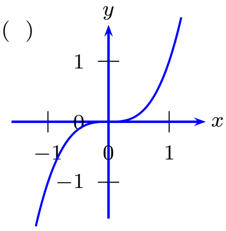
Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\frac{d\vec T}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec T}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec r'(t)\times\vec r''(t)\Vert}{\Vert\vec r'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec B}{ds}\cdot\vec N = \frac{\left(\vec r'(t)\times\vec r''(t)\right)\cdot\vec r'''(t)}{\Vert\vec r'(t)\times\vec r''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec B}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec B}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec a\times\vec v\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec a\cdot\vec v}{v} = \frac{dv}{dt}$

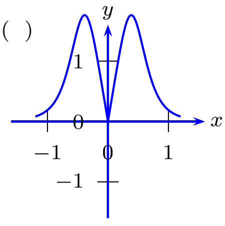
Equações de Frenet-Serret:

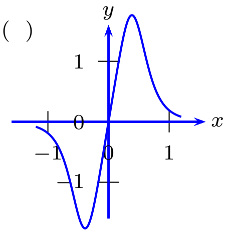
$$\begin{aligned}
\frac{d\vec T}{ds} &= \kappa\vec N \\
\frac{d\vec N}{ds} &= -\kappa\vec T + \tau\vec B \\
\frac{d\vec B}{ds} &= -\tau\vec N
\end{aligned}$$

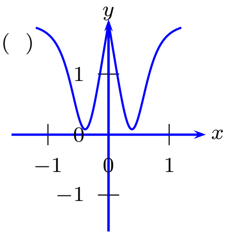
• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere a curva representada na figura ao lado. A figura é simétrica com respeito a origem, isto é, ela pode ser representada por uma função ímpar $y(x)$. Considere que a curva está orientada no sentido positivo de x. Assinale as alternativas corretas que indicam o vetor binormal nos pontos $(-1,-1)$ e $(1,1)$ e o gráfico da curvatura $\kappa(x)$, respectivamente.

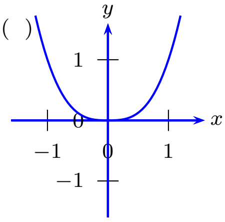


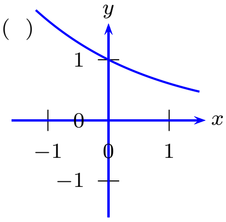
( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

Vetor binormal nos pontos $(-1,-1)$ e $(1,1)$, nessa ordem.

( ) $\vec{k}$ e $-\vec{k}$.

( ) $-\vec{k}$ e $\vec{k}$.

( ) $\vec{k}$ e $\vec{k}$.

( ) $-\vec{k}$ e $-\vec{k}$.

( ) nenhuma das alternativas anteriores.

• **Questão 2** (1.0 ponto) *Mens sana in corpore sano.* Diversos estudantes têm aderido ao ciclismo como modo de transporte barato, não poluente e saudável. Em uma bicicleta, uma estudante de engenharia se desloca sobre o plano nos arredores da orla do Guaíba em Porto Alegre. Em determinado momento, a ciclista trava o guidon e percorre uma trajetória circular com 3m de raio à velocidade constante de 2 m/s. Assinale as alternativas que indicam a aceleração normal e tangencial experimentada pela atleta.

( ) $a_N = \frac{8}{3} m/s^2$	( ) $a_T = \frac{8}{3} m/s^2$
( ) $a_N = \frac{6}{3} m/s^2$	( ) $a_T = \frac{6}{3} m/s^2$
( ) $a_N = \frac{4}{3} m/s^2$	( ) $a_T = \frac{4}{3} m/s^2$
( ) $a_N = \frac{2}{3} m/s^2$	( ) $a_T = \frac{2}{3} m/s^2$
( ) $a_N = \frac{1}{3} m/s^2$	( ) $a_T = \frac{1}{3} m/s^2$
( ) $a_N = 0$	( ) $a_T = 0$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Seja $\vec{F}$ o campo vetorial dado por $\vec{F} = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}$, C_1 o caminho dado pela semircunferência de raio unitário no plano xy com $y > 0$ orientada no sentido $(1,0,0) \to (-1,0,0)$ e C_2 o caminho dado pelo segmento de reta que liga o ponto $(-1,0,0)$ ao ponto $(1,0,0)$ orientado no sentido $(-1,0,0) \to (1,0,0)$.

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $W_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

( ) $W_1 = -2e^{-1}$	( ) $W_2 = -2e^{-1}$
( ) $W_1 = 2e^{-1}$	( ) $W_2 = 2e^{-1}$
( ) $W_1 = 2(1 - e^{-1})$	( ) $W_2 = 2(1 - e^{-1})$
( ) $W_1 = 2(e^{-1} - 1)$	( ) $W_2 = 2(e^{-1} - 1)$
( ) $W_1 = 2$	( ) $W_2 = 2$
( ) $W_1 = -2$	( ) $W_2 = -2$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Seja $\vec{F}$ o campo vetorial dado por $\vec{F} = \left(2xy + y^2\right) z\vec{i} + x^2y\vec{k}$ e C o caminho C dado pela circunferência centrada em $(0,1,0)$ e raio 1 no plano $y = 1$, orientada no sentido $(1,1,0) \to (0,1,1) \to (-1,1,0) \to (0,1,-1) \to (1,1,0)$.

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ e $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

( ) $\vec{G} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$	( ) 0
( ) $\vec{G} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + \vec{k}$	( ) 2π
( ) $\vec{G} = x^2\vec{i} + (2xy + y^2)\vec{j} - z(2x + 2y)\vec{k}$	( ) π
( ) $\vec{G} = x^2\vec{i} + (2xy + y^2)\vec{j}$	( ) $-\pi$
( ) $\vec{G} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - z(2x + 2y)\vec{k}$	( ) -2π

• **Questão 5** (1.0 ponto) Seja V o cubo de lado 1 cujos vértices são $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,1,1)$ e S a superfície cúbica que limita V orientada para fora. Considere o campo $\vec{F} = r^2\vec{r}$.

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ e $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 5r^2$	( ) $5/3$
( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3r^2$	( ) $5/2$
( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2r^2$	( ) $10/3$
( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 5r$	( ) 5
( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3r$	( ) 15

- **Questão 6** (2.0 ponto) Seja a curva descrita por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + 2\,\mathrm{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}$$

a) (1.0) Calcule a curvatura κ como uma função da coordenada x e simplifique sua resposta.

b) (1.0) Calcule a torção τ como uma função da coordenada x e simplifique sua resposta.

• **Questão 7** (3.0 ponto) Considere a superfície fechada dada superiormente por:

$$S_1 : z = e^{-x^2-y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

e inferiormente por:

$$S_2 : z = e^{-1}, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

orientada para fora e o campo dado por $\vec{F} = z\vec{k}$. Calcule $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS$.

a) (1.5) Via teorema da divergência.

b) (1.5) Via parametrização direta da superfície.