UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2019/2
Prova da área I

1-5	6	7	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Ponto extra: ( )Wikipédia ( )Apresentação ( )Nenhum **Tópico:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

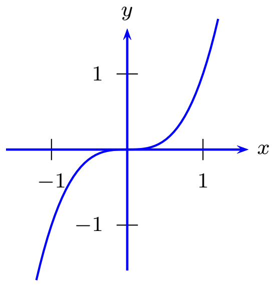
Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert \frac{d\vec{T}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{\left(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right)\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert \frac{d\vec{B}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere a curva representada na figura ao lado. A figura é simétrica com respeito a origem, isto é, ela pode ser representada por uma função ímpar $y(x)$. Considere que a curva está orientada no sentido positivo de x. Assinale as alternativas corretas que indicam o vetor binormal nos pontos $(-1,-1)$ e $(1,1)$ e o gráfico da curvatura $\kappa(x)$, respectivamente.



Vetor binormal nos pontos $(-1,-1)$ e $(1,1)$, nessa ordem.

( ) $\vec{k}$ e $-\vec{k}$.

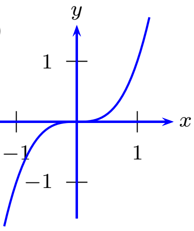
(X) $-\vec{k}$ e $\vec{k}$.

( ) $\vec{k}$ e $\vec{k}$.

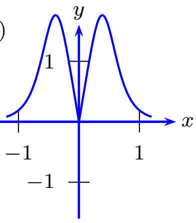
( ) $-\vec{k}$ e $-\vec{k}$.

( ) nenhuma das alternativas anteriores.

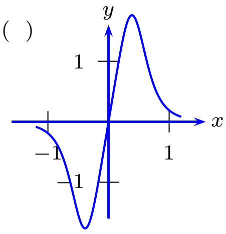
( )



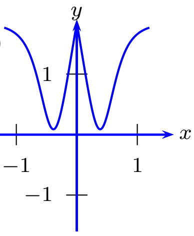
(X)



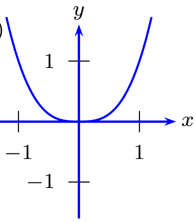
( )



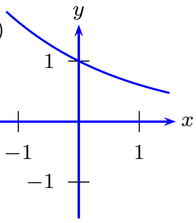
( )



( )



( )



• **Questão 2** (1.0 ponto) *Mens sana in corpore sano.* Diversos estudantes têm aderido ao ciclismo como modo de transporte barato, não poluente e saudável. Em uma bicicleta, uma estudante de engenharia se desloca sobre o plano nos arredores da orla do Guaíba em Porto Alegre. Em determinado momento, a ciclista trava o guidon e percorre uma trajetória circular com 3m de raio à velocidade constante de 2 m/s. Assinale as alternativas que indicam a aceleração normal e tangencial experimentada pela atleta.

( ) $a_N = \frac{8}{3} m/s^2$

( ) $a_N = \frac{6}{3} m/s^2$

(X) $a_N = \frac{4}{3} m/s^2$

( ) $a_N = \frac{2}{3} m/s^2$

( ) $a_N = \frac{1}{3} m/s^2$

( ) $a_N = 0$

( ) $a_T = \frac{8}{3} m/s^2$

( ) $a_T = \frac{6}{3} m/s^2$

( ) $a_T = \frac{4}{3} m/s^2$

( ) $a_T = \frac{2}{3} m/s^2$

( ) $a_T = \frac{1}{3} m/s^2$

(X) $a_T = 0$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Seja $\vec{F}$ o campo vetorial dado por $\vec{F} = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}$, C_1 o caminho dado pela semircunferência de raio unitário no plano xy com $y > 0$ orientada no sentido $(1,0,0) \to (-1,0,0)$ e C_2 o caminho dado pelo segmento de reta que liga o ponto $(-1,0,0)$ ao ponto $(1,0,0)$ orientado no sentido $(-1,0,0) \to (1,0,0)$.

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $W_2 = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(X) $W_1 = -2e^{-1}$	( ) $W_2 = -2e^{-1}$
( ) $W_1 = 2e^{-1}$	( ) $W_2 = 2e^{-1}$
( ) $W_1 = 2(1-e^{-1})$	(X) $W_2 = 2(1-e^{-1})$
( ) $W_1 = 2(e^{-1}-1)$	( ) $W_2 = 2(e^{-1}-1)$
( ) $W_1 = 2$	( ) $W_2 = 2$
( ) $W_1 = -2$	( ) $W_2 = -2$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Seja $\vec{F}$ o campo vetorial dado por $\vec{F} = \left(2xy + y^2\right) z\vec{i} + x^2y\vec{k}$ e C o caminho C dado pela circunferência centrada em $(0,1,0)$ e raio 1 no plano $y = 1$, orientada no sentido $(1,1,0) \to (0,1,1) \to (-1,1,0) \to (0,1,-1) \to (1,1,0)$.

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ e $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

( ) $\vec{G} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$	( ) 0
( ) $\vec{G} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + \vec{k}$	( ) 2π
( ) $\vec{G} = x^2\vec{i} + (2xy + y^2)\vec{j} - z(2x + 2y)\vec{k}$	( ) π
( ) $\vec{G} = x^2\vec{i} + (2xy + y^2)\vec{j}$	(X) $-\pi$
(X) $\vec{G} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - z(2x + 2y)\vec{k}$	( ) -2π

• **Questão 5** (1.0 ponto) Seja V o cubo de lado 1 cujos vértices são $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,1,1)$ e S a superfície cúbica que limita V orientada para fora. Considere o campo $\vec{F} = r^2\vec{r}$.

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ e $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$

(X) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 5r^2$	( ) $5/3$
( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3r^2$	( ) $5/2$
( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2r^2$	( ) $10/3$
( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 5r$	(X) 5
( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3r$	( ) 15

- **Questão 6** (2.0 ponto) Seja a curva descrita por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + 2\,\mathrm{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}$$

a) (1.0) Calcule a curvatura κ como uma função da coordenada x e simplifique sua resposta.

b) (1.0) Calcule a torção τ como uma função da coordenada x e simplifique sua resposta.

Solução: a)

$$\begin{aligned}
\vec{r}' &= -\,\mathrm{sen}(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + \vec{k}\\
\|\vec{r}'\| &= \sqrt{\mathrm{sen}^2(t) + 4\cos^2(t) + 1}\\
\vec{r}'' &= -\cos(t)\vec{i} - 2\,\mathrm{sen}(t)\vec{j}\\
\vec{r}' \times \vec{r}'' &= 2\,\mathrm{sen}^2(t)\vec{k} + 2\cos^2(t)\vec{k} - \cos(t)\vec{j} + 2\,\mathrm{sen}(t)\vec{i} = 2\,\mathrm{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + 2\vec{k}\\
\|\vec{r}' \times \vec{r}''\| &= \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2(t) + \cos^2(t) + 4}\\
\kappa &= \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3} = \frac{\sqrt{4\,\mathrm{sen}^2(t) + \cos^2(t) + 4}}{\left(\sqrt{\mathrm{sen}^2(t) + 4\cos^2(t) + 1}\right)^3}
\end{aligned}$$

Usando o fato que $\mathrm{sen}^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, temos:

$$\kappa = \frac{\sqrt{4(1-\cos^2(t)) + \cos^2(t) + 4}}{\left(\sqrt{1-\cos^2(t) + 4\cos^2(t) + 1}\right)^3} = \frac{\sqrt{8 - 3\cos^2(t)}}{\left(\sqrt{2 + 3\cos^2(t)}\right)^3} = \frac{\sqrt{8-3x^2}}{\left(\sqrt{2+3x^2}\right)^3}.$$

Solução: b)

$$\begin{aligned}
\vec{r}''' &= \mathrm{sen}(t)\vec{i} - 2\cos(t)\vec{j}\\
(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \vec{r}''' &= 2\,\mathrm{sen}^2(t) + 2\cos^2(t) = 2\\
\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2 &= 4\,\mathrm{sen}^2(t) + \cos^2(t) + 4\\
\tau &= \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2} = \frac{2}{4\,\mathrm{sen}^2(t) + \cos^2(t) + 4}.
\end{aligned}$$

Usando o fato que $\mathrm{sen}^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, temos:

$$\tau = \frac{2}{4(1-\cos^2(t)) + \cos^2(t) + 4} = \frac{2}{8 - 3\cos^2(t)} = \frac{2}{8-3x^2}.$$

• **Questão 7** (3.0 ponto) Considere a superfície fechada dada superiormente por:

$$S_1 : z = e^{-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2 \leq 1.$$

e inferiormente por:

$$S_2 : z = e^{-1}, \quad x^2+y^2 \leq 1.$$

orientada para fora e o campo dado por $\vec{F} = z\vec{k}$. Calcule $\Phi = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{\eta}dS$.

a) (1.5) Via teorema da divergência.

b) (1.5) Via parametrização direta da superfície.

Solução: a)

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \vec{F}\cdot\vec{\eta}dS \\
&= \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV \\
&= \iiint_V 1dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{e^{-1}}^{e^{-r^2}} 1rdzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(re^{-r^2} - re^{-1}\right)drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\left(-\frac{e^{-r^2}}{2} - \frac{r^2e^{-1}}{2}\right)\bigg|_0^1\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1-e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1}}{2}\right)d\theta \\
&= 2\pi\left(\frac{1-2e^{-1}}{2}\right) = \pi\left(1-2e^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Solução: b)

Superfície S_1:

$$\begin{aligned}
G &= z - e^{-x^2-y^2} \\
\vec{\nabla}G &= -2xe^{-x^2-y^2}\vec{i} - 2ye^{-x^2-y^2}\vec{j} + \vec{k} \\
\vec{F} &= e^{-x^2-y^2}\vec{k}.
\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{\eta}dS &= \iint_D \vec{F}\cdot\vec{\nabla}GdA \\
&= \iint_D e^{-x^2-y^2}dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-r^2}rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{-e^{-r^2}}{2}\bigg|_0^1\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1-e^{-1}}{2}d\theta \\
&= 2\pi\frac{1-e^{-1}}{2} = \pi\left(1-e^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Superfície S_2:

$$\begin{aligned}
G &= z - e^{-1} \\
\vec{\nabla}G &= \vec{k} \\
\vec{F} &= e^{-1}\vec{k}.
\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{\eta}dS &= -\iint_D \vec{F}\cdot\vec{\nabla}GdA \\
&= -\iint_D e^{-1}dA = -\pi e^{-1}.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\Phi = \iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{\eta}dS + \iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{\eta}dS = \pi\left(1-2e^{-1}\right).$$