UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2019/2
Prova da área I

1-5	6	7	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Ponto extra: ( )Wikipédia ( )Apresentação ( )Nenhum **Tópico:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert \frac{d\vec{T}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{\left(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right)\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert \frac{d\vec{B}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere a curva no plano xy dada por $y = x^3$. Assinale as alternativas corretas que indicam a curvatura e os pontos de curvatura máxima, respectivamente. Dica: $\kappa_{max} = \dfrac{1}{\rho_{min}}$.

Curvatura

( ) $\kappa = \dfrac{6|x|}{(1+9x^4)^{3/2}}$

( ) $\kappa = \dfrac{2|x|}{(1+4x^2)^{3/2}}$

( ) $\kappa = \dfrac{3|x|}{(1+4x^2)^{3/2}}$

( ) $\kappa = \dfrac{6}{(1+9x^4)^{3/2}}$

( ) $\kappa = \dfrac{18}{(1+9x^4)^{3/2}}$

Pontos de curvatura máxima

( ) A curvatura é máxima quando $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

( ) A curvatura é máxima quando $x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{1}{45}}$.

( ) A curvatura é máxima quando $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{45}}$.

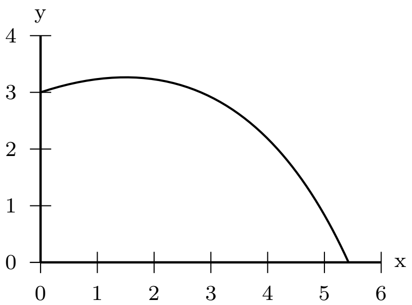
( ) A curvatura é máxima quando $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{9}}$.

( ) A curvatura é máxima quando $x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{1}{9}}$.

• **Questão 2** (1.0 ponto) Ash trava uma batalha contra pokémons lendários. Pikachu salta realizando uma trajetória no ar dada por:

$$x(t) = 9\left(1 - e^{-t/3}\right), \qquad y(t) = 3 + 18\left(1 - e^{-t/3}\right) - 5t, \qquad z(t) = 0.$$

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, uma expressão para o módulo da aceleração do Pikachu e a altura máxima atingida por ele.



( ) $\|\vec{a}\| = 5\sqrt{5}e^{-t/3}$

( ) $\|\vec{a}\| = 5e^{-t/3}$

( ) $\|\vec{a}\| = \sqrt{5}e^{-3t}$

( ) $\|\vec{a}\| = \sqrt{5}e^{-t/3}$

( ) $\|\vec{a}\| = \sqrt{5}$

( ) $y\text{max} = 21 + 15\ln\left(\dfrac{5}{6}\right)$

( ) $y\text{max} = 6 + 15\ln\left(\dfrac{5}{6}\right)$

( ) $y\text{max} = 18 - 15\ln\left(\dfrac{5}{6}\right)$

( ) $y\text{max} = \dfrac{46}{2} + e^{\frac{5}{6}}$

( ) $y\text{max} = 21 - 3\ln\left(\dfrac{5}{6}\right)$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Seja C a curva complicada orientada no sentido positivo de t e dada por:

$$x(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right), \qquad y(t) = t + e^{-t^2} - e^{-t}, \qquad z(t) = \operatorname{sen}(\pi t), \qquad t \in [0,1].$$

Considere o campo conservativo dado por $\vec{F} = -\pi y^2 \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi z)\vec{i} + 2y\cos(\pi x)\cos(\pi z)\vec{j} - \pi y^2 \cos(\pi x)\operatorname{sen}(\pi z)\vec{k}$.

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, um potencial para $\vec{F}$ e a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

( ) $\varphi(x,y,z) = \pi y^2 \cos(\pi x)\cos(\pi z) + C$
( ) $\varphi(x,y,z) = -\pi y^2 \operatorname{sen}(\pi x)\operatorname{sen}(\pi z) + C$
( ) $\varphi(x,y,z) = y^2 \operatorname{sen}(\pi x)\operatorname{sen}(\pi z) + C$
( ) $\varphi(x,y,z) = -\pi y \cos(\pi x)\cos(\pi z) + C$
( ) $\varphi(x,y,z) = y^2 \cos(\pi x)\cos(\pi z) + C$

( ) π
( ) $-\pi$
( ) 1
( ) -1
( ) 0

• **Questão 4** (1.0 ponto) Seja $\vec{F}$ o campo vetorial dado por $\vec{F} = 2xyz^2\vec{i} + x^2yz\vec{j}$ e C o caminho dado pelo quadrado de vértices $P_1 = (0,1,0)$, $P_2 = (0,1,2)$,$P_3 = (2,1,2)$ e $P_4 = (2,1,0)$, orientado no sentido $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_1$

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ e $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

( ) $\vec{G} = x^2z\vec{i} + 2xyz\vec{j} - 2xz^2\vec{k}$
( ) $\vec{G} = -x^2y\vec{i} - 2xyz\vec{j} + 2xz(y-z)\vec{k}$
( ) $\vec{G} = -x^2y\vec{i} + 4xyz\vec{j} + 2xz(y-z)\vec{k}$
( ) $\vec{G} = -x^2y\vec{i} + 2xyz\vec{j}$
( ) $\vec{G} = x^2y\vec{i} + 4xyz\vec{j} - 2xz^2\vec{k}$

( ) 1/2
( ) 2
( ) 4
( ) 8
( ) 16

• **Questão 5** (1.0 ponto) Seja V a região dada por:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \; x \geq 0, \; y \geq 0.$$

S é a superfície fechada que limita V orientada para fora. Considere o campo $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$. Utilize o teorema da divergência para calcular o fluxo $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

Assinale as alternativas que indicam expressões corretas para Φ:

( ) $3\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\pi r^4 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi d\theta dr$
( ) $3\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} r^4 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi d\theta dr$
( ) $3\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^\pi r^4 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi d\theta dr$
( ) $3\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^3 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi d\theta dr$
( ) $3\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi d\theta dr$
( ) Nenhuma das anteriores

( ) $\frac{3\pi}{5}$
( ) $\frac{3\pi}{4}$
( ) π
( ) $\frac{3\pi}{2}$
( ) 3π
( ) Nenhuma das anteriores

- **Questão 6** (2.0 ponto) Seja a curva descrita por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{i} + t^2\vec{k}$$

a) (1.0) Calcule a curvatura κ e simplifique sua resposta.

b) (1.0) Calcule a torção τ e simplifique sua resposta.

• **Questão 7** (3.0 ponto) Considere a superfície fechada dada superiormente por:

$$S_1 : z = x(1-x)y(1-y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

e inferiormente por:

$$S_2 : z = 0, , \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

orientada para fora e o campo dado por $\vec{F} = x\vec{i} + (z-1)\vec{k}$. Calcule $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS$.

a) (1.5) Via teorema da divergência.

b) (1.5) Via parametrização direta da superfície.