UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2019/2
Prova da área I

1-5	6	7	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Ponto extra: ( )Wikipédia ( )Apresentação ( )Nenhum **Tópico:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert \frac{d\vec{T}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert = \frac{\Vert \vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{\left(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right)\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert \frac{d\vec{B}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere a curva no plano xy dada por $y = x^3$. Assinale as alternativas corretas que indicam a curvatura e os pontos de curvatura máxima, respectivamente. Dica: $\kappa_{max} = \dfrac{1}{\rho_{min}}$.

Curvatura	Pontos de curvatura máxima
(x) $\kappa = \dfrac{6\|x\|}{(1+9x^4)^{3/2}}$	( ) A curvatura é máxima quando $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.
( ) $\kappa = \dfrac{2\|x\|}{(1+4x^2)^{3/2}}$	(x) A curvatura é máxima quando $x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{1}{45}}$.
( ) $\kappa = \dfrac{3\|x\|}{(1+4x^2)^{3/2}}$	( ) A curvatura é máxima quando $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{45}}$.
( ) $\kappa = \dfrac{6}{(1+9x^4)^{3/2}}$	( ) A curvatura é máxima quando $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{9}}$.
( ) $\kappa = \dfrac{18}{(1+9x^4)^{3/2}}$	( ) A curvatura é máxima quando $x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{1}{9}}$.

Esta questão é muito semelhante à questão 7 da segunda lista da apostila da prof. Irene Strauch. Lá a função é $f(x) = e^x$.

Use a fórmula:

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$$

ou a parametrização:

$$\vec{r} = t\vec{i} + t^3\vec{j}$$

para obter a curvatura $\kappa = \dfrac{6|x|}{(1+9x^4)^{3/2}}$.

Agora note que:

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{\kappa} = \frac{(1+9x^4)^{3/2}}{6|x|}, \quad x \neq 0 \\
&= \left[\frac{(1+9x^4)}{6x^{2/3}}\right]^{3/2} \\
&= \left[\frac{x^{-2/3}}{6} + \frac{3}{2}x^{10/3}\right]^{3/2}
\end{aligned}$$

O ponto de mínimo raio de curvatura acontece quando:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{-2/3}}{6} + \frac{3}{2}x^{10/3}\right] = 0$$

isto é:

$$-\frac{1}{9}x^{-5/3} + 5x^{7/3} = 0$$

Multiplicando por $x^{5/3}$, temos:

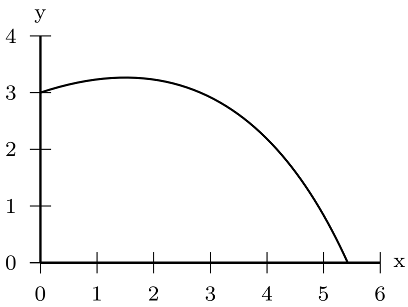
$$-\frac{1}{9} + 5x^4 = 0$$

Ou seja $x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{1}{45}}$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Ash trava uma batalha contra pokémons lendários. Pikachu salta realizando uma trajetória no ar dada por:

$$x(t) = 9\left(1 - e^{-t/3}\right), \qquad y(t) = 3 + 18\left(1 - e^{-t/3}\right) - 5t, \qquad z(t) = 0.$$

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, uma expressão para o módulo da aceleração do Pikachu e a altura máxima atingida por ele.



( ) $\|\vec{a}\| = 5\sqrt{5}e^{-t/3}$

( ) $\|\vec{a}\| = 5e^{-t/3}$

( ) $\|\vec{a}\| = \sqrt{5}e^{-3t}$

(x) $\|\vec{a}\| = \sqrt{5}e^{-t/3}$

( ) $\|\vec{a}\| = \sqrt{5}$

( ) $y\max = 21 + 15\ln\left(\frac{5}{6}\right)$

(x) $y\max = 6 + 15\ln\left(\frac{5}{6}\right)$

( ) $y\max = 18 - 15\ln\left(\frac{5}{6}\right)$

( ) $y\max = \frac{46}{2} + e^{\frac{5}{6}}$

( ) $y\max = 21 - 3\ln\left(\frac{5}{6}\right)$

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= 9\left(1 - e^{-t/3}\right)\vec{i} + \left[3 + 18\left(1 - e^{-t/3}\right) - 5t\right]\vec{j} \\
\vec{r}'(t) &= 3e^{-t/3}\vec{i} + \left[6e^{-t/3} - 5\right]\vec{j} \\
\vec{r}''(t) &= -e^{-t/3}\vec{i} - 2e^{-t/3}\vec{j} = -e^{-t/3}\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right)
\end{aligned}$$

Assim:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(-e^{-t/3}\right)^2 + \left(-2e^{-t/3}\right)^2} = e^{-t/3}\sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}e^{-t/3}$$

Para o item b, veja que $y'(t) = 0$ quando $6e^{-t/3} = 5$, isto é $t = -3\ln(5/6)$. Sustituindo em $y(t)$, temos o resultado.

• **Questão 3** (1.0 ponto) Seja C a curva complicada orientada no sentido positivo de t e dada por:

$$x(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right), \quad y(t) = t + e^{-t^2} - e^{-t}, \quad z(t) = \text{sen}(\pi t), \qquad t \in [0, 1].$$

Considere o campo conservativo dado por $\vec{F} = -\pi y^2 \,\text{sen}(\pi x)\cos(\pi z)\vec{i} + 2y\cos(\pi x)\cos(\pi z)\vec{j} - \pi y^2 \cos(\pi x)\,\text{sen}(\pi z)\vec{k}$.

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, um potencial para $\vec{F}$ e a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

( ) $\varphi(x, y, z) = \pi y^2 \cos(\pi x)\cos(\pi z) + C$ ( ) π

( ) $\varphi(x, y, z) = -\pi y^2 \,\text{sen}(\pi x)\,\text{sen}(\pi z) + C$ ( ) $-\pi$

( ) $\varphi(x, y, z) = y^2 \,\text{sen}(\pi x)\,\text{sen}(\pi z) + C$ ( ) 1

( ) $\varphi(x, y, z) = -\pi y \cos(\pi x)\cos(\pi z) + C$ (x) -1

(x) $\varphi(x, y, z) = y^2 \cos(\pi x)\cos(\pi z) + C$ ( ) 0

Para obter o potencial, integramos o campo sucessivamente. Para o item b, observe que sendo o campo conservativo, basta calcular a diferença de potencial entre $(x(1), y(1), z(1))$ e $(x(0), y(0), z(0))$, isto é:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(1, 1, 0) - \varphi(0, 0, 0) = 1(-1)(1) - 0 = -1$$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Seja $\vec{F}$ o campo vetorial dado por $\vec{F} = 2xyz^2\vec{i} + x^2yz\vec{j}$ e C o caminho dado pelo quadrado de vértices $P_1 = (0,1,0)$, $P_2 = (0,1,2)$,$P_3 = (2,1,2)$ e $P_4 = (2,1,0)$, orientado no sentido $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_1$

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ e $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

( ) $\vec{G} = x^2z\vec{i} + 2xyz\vec{j} - 2xz^2\vec{k}$

( ) $\vec{G} = -x^2y\vec{i} - 2xyz\vec{j} + 2xz(y-z)\vec{k}$

(x) $\vec{G} = -x^2y\vec{i} + 4xyz\vec{j} + 2xz(y-z)\vec{k}$

( ) $\vec{G} = -x^2y\vec{i} + 2xyz\vec{j}$

( ) $\vec{G} = x^2y\vec{i} + 4xyz\vec{j} - 2xz^2\vec{k}$

( ) 1/2

( ) 2

( ) 4

( ) 8

(x) 16

O campo $\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ pode ser obtido diretamente da definição. Para o item b, observe que o caminho é um quadrado no plano $y = 1$ com vetor normal dado por $\vec{n} = \vec{j}$. Usando o teorema de Stokes, temos:

$$\begin{aligned}
W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{n} dS \\
&= \int_S \vec{G} \cdot \vec{j} dS = \int_S 4xyz dS \\
&= 4 \int_0^2 \int_0^2 xz dx dz, \quad \text{pois } y = 1 \\
&= 4 \left(\int_0^2 x dx \right) \left(\int_0^2 z dz \right) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16
\end{aligned}$$

• **Questão 5** (1.0 ponto) Seja V a região dada por:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0.$$

S é a superfície fechada que limita V orientada para fora. Considere o campo $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$. Utilize o teorema da divergência para calcular o fluxo $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

Assinale as alternativas que indicam expressões corretas para Φ:

( ) $3\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\pi r^4 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi d\theta dr$

( ) $3\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} r^4 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi d\theta dr$

(x) $3\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^\pi r^4 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi d\theta dr$

( ) $3\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^3 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi d\theta dr$

( ) $3\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi d\theta dr$

( ) Nenhuma das anteriores

(x) $\frac{3\pi}{5}$

( ) $\frac{3\pi}{4}$

( ) π

( ) $\frac{3\pi}{2}$

( ) 3π

( ) Nenhuma das anteriores

Usando o teorema da divergência, temos:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\ &= 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV = 3\iiint_V r^2 dV \end{aligned}$$

Use coordenadas esféricas:

$$x = r\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta), \quad y = r\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta), \quad z = r\cos(\varphi).$$

O quarto de esfera a ser integrado satisfaz $\cos(\theta) \geq 0$ e $\operatorname{sen}(\theta) \geq 0$, pelo que $\theta \in [0, \pi/2]$. Use o fato que $dV = r^2 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi d\theta dr$ e o resultado segue.

Para o item b:

$$\begin{aligned} \Phi &= 3\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^\pi r^4 \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi d\theta dr \\ &= 3\left(\int_0^1 r^4 dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right)\left(\int_0^\pi \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi\right) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \frac{3\pi}{5} \end{aligned}$$

• **Questão 6** (2.0 ponto) Seja a curva descrita por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + t^2\vec{k}$$

a) (1.0) Calcule a curvatura κ e simplifique sua resposta.

b) (1.0) Calcule a torção τ e simplifique sua resposta.

Esta questão é muito semelhante ao exemplo 11 da página 3/5 da apostila da prof. Irene Strauch e se enquadra como um caso particular do exercício 2.4.4. de `https://www.ufrgs.br/reamat/Calculo/livro-cv/cet-curvatura_e_torx00e7x00e3o.html#x12-160002.4`verb

Primeiro calculamos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + t^2\vec{k}\\
\vec{r'}(t) &= -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + 2t\vec{k}\\
\vec{r''}(t) &= -\cos(t)\vec{i} - \operatorname{sen}(t)\vec{j} + 2\vec{k}\\
\vec{r'''}(t) &= \operatorname{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j}
\end{aligned}$$

Assim temos:

$$\|\vec{r'}(t)\|^2 = \operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) + 4t^2 = 1 + 4t^2$$

$$\begin{aligned}
\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t) &= \left[2\cos(t) + 2t\operatorname{sen}(t)\right]\vec{i} + \left[-2t\cos(t) + 2\operatorname{sen}(t)\right]\vec{j} + \left[\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)\right]\vec{k}\\
&= 2\left[\cos(t) + t\operatorname{sen}(t)\right]\vec{i} + 2\left[-t\cos(t) + \operatorname{sen}(t)\right]\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}$$

Atenção $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 \neq \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)\right\|^2 &= 4\left[\cos(t) + t\operatorname{sen}(t)\right]^2 + 4\left[-t\cos(t) + \operatorname{sen}(t)\right]^2 + 1\\
&= 4\left[\cos(t)^2 + 2t\operatorname{sen}(t)\cos(t) + t^2\operatorname{sen}^2(t)\right] + 4\left[t^2\cos(t)^2 - 2t\cos(t)\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}^2(t)\right] + 1\\
&= 5 + 4t^2
\end{aligned}$$

e

$$\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t) \cdot \vec{r'''}(t) = 2\left[\cos(t) + t\operatorname{sen}(t)\right]\operatorname{sen}(t) - 2\left[-t\cos(t) + \operatorname{sen}(t)\right]\cos(t) = 2t$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\left\|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)\right\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{5+4t^2}}{(1+4t^2)^{3/2}}\\
\tau(t) &= \frac{\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t) \cdot \vec{r'''}(t)}{\left\|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)\right\|^2} = \frac{2t}{5+4t^2}
\end{aligned}$$

• **Questão 7** (3.0 ponto) Considere a superfície fechada dada superiormente por:

$$S_1 : z = x(1-x)y(1-y), \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1.$$

e inferiormente por:

$$S_2 : z = 0, , \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1.$$

orientada para fora e o campo dado por $\vec{F} = x\vec{i} + (z-1)\vec{k}$. Calcule $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS$.

a) (1.5) Via teorema da divergência.

b) (1.5) Via parametrização direta da superfície.

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 1 + 0 + 1 = 2$. Basta calcular:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x(1-x)y(1-y)} 2dzdydx \\
&= 2\int_0^1 \int_0^1 x(1-x)y(1-y)dydx \\
&= 2\left(\int_0^1 y(1-y)dy\right)\left(\int_0^1 x(1-x)dx\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

b) Escreva $\Phi = \Phi_{S_1} + \phi_{S_2}$

Φ_{S_1} é o fluxo através da componente superior parametrizada como a superfície de nível da função:

$$G(x,y,z) = z - x(1-x)y(1-y)$$

cujo gradiente é:

$$\vec{\nabla} G(x,y,z) = (-1+2x)y(1-y)\vec{i} + (-1+2y)x(1-x)\vec{j} + \vec{k}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G(x,y,z) &= (-x+2x^2)y(1-y) + (z-1) \\
&= (-x+2x^2)y(1-y) + (x(1-x)y(1-y) - 1) \\
&= x^2y - x^2y^2 - 1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi_{S_1} &= \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2y - x^2y^2 - 1\right) dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^3y}{3} - \frac{x^3y^2}{3}\right)_0^1 dy - 1 \\
&= \int_0^1 \left(\frac{y}{3} - \frac{y^2}{3}\right) dy - 1 \\
&= \left(\frac{y^2}{6} - \frac{y^3}{9}\right)_0^1 - 1 \\
&= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right)_0^1 - 1 = -\frac{17}{18}
\end{aligned}$$

O fluxo por S_2 (um quadrado de lado 1 e cuja normal é $\vec{n} = -\vec{k}$) é dado por:

$$\Phi_{S_2} = \int_0^1 \int_0^1 dxdy = 1$$

Finalmente:

$$\Phi = -\frac{17}{18} + 1 = \frac{1}{18}$$