UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2022/1
Prova da área I

1-5	6	7	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

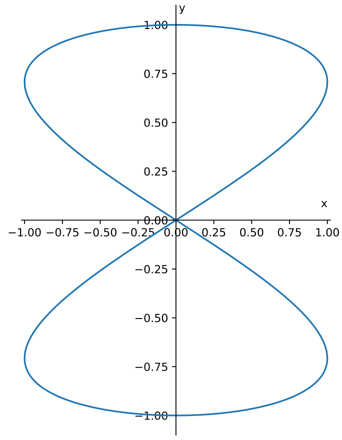
Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\|}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\|}$
Curvatura	$\kappa = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \left\|\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\| = \frac{\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\|^2}$
Módulo da Torção	$\|\tau\| = \left\|\frac{d\vec{B}}{ds}\right\| = \left\|\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\|$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\|\vec{a}\times\vec{v}\|}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1a** (0.5 ponto cada item) Considere a trajetória parametrizada pela seguinte função vetorial:

$$\vec{r}(t) = \text{sen}(2t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}, \quad t \geq 0$$



Seja t_0 o primeiro instante positivo em que a trajetória passa pela origem.
Assinale na primeira coluna o valor de t_0. Na segunda coluna assinale o vetor tangente unitário à trajetória neste instante:

O parâmetro t_0:

( ) 0
( ) $\frac{\pi}{8}$
( ) $\frac{\pi}{4}$
( ) $\frac{\pi}{2}$
( ) $\frac{3\pi}{2}$

Tangente unitário em t_0:

( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}\left(2\vec{i} + \vec{j}\right)$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}\left(2\vec{i} - \vec{j}\right)$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}\left(-2\vec{i} + \vec{j}\right)$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}\left(-2\vec{i} - \vec{j}\right)$
( ) Nenhuma das anteriores

• **Questão 1b** (0.5 ponto cada item) Considere a mesma trajetória da questão anterior. Assinale na primeira coluna os vetores binormais unitários, respectivamente, $t_1 := 0$ $t_2 := \pi$. Na segunda coluna, assinale o valor da curvatura nesses pontos, que são idênticos:

$\vec{B}(0)$ e $\vec{B}(\pi)$:

( ) $\vec{k}$ e $\vec{k}$
( ) $\vec{k}$ e $-\vec{k}$
( ) $-\vec{k}$ e $\vec{k}$
( ) $-\vec{k}$ e $-\vec{k}$
( ) Nenhuma das anteriores

$\kappa(0) = \kappa(\pi)$:

( ) 0
( ) 1/4
( ) 1/2
( ) 1
( ) 2

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Considere a trajetória dada pela parametrização a seguir:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + \frac{1}{2}t^2\vec{k}$$

Assinale as alternativas que indicam respectivamente a norma da velocidade e a torção no ponto $t = \pi$.

( ) $\pi^2 + 1$
( ) $\pi^2 + 2$
( ) $\sqrt{\pi^2 + 1}$
( ) $\sqrt{\pi^2 + 2}$
( ) N. d. a.

( ) $\frac{\pi}{\pi^2 + 1}$
( ) $\frac{\pi}{\pi^2 + 2}$
( ) $\frac{\pi}{\pi^2 - 1}$
( ) $\frac{\pi}{\pi^2 - 2}$
( ) N. d. a.

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) A temperatura em um ponto $P(x, y)$ de uma placa é dada por:

$$T(x, y) = \frac{xy}{1 + xy}$$

As dimensões da placa são $0 \leq x, y \leq 4$. Em relação ao ponto $(1, 2)$, assinale na primeira coluna o vetor unitário $\vec{u}$ na direção e sentido da maior taxa de variação da temperatura e na segunda coluna, a intensidade dessa maior taxa de variação:

( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}(\vec{i} + 2\vec{j})$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{i} + \vec{j})$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}(\vec{i} - 2\vec{j})$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}(-2\vec{i} + \vec{j})$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}(-\vec{i} + 2\vec{j})$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{i} - \vec{j})$

( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
( ) $\frac{\sqrt{3}}{9}$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{45}$
( ) $\frac{\sqrt{15}}{45}$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{9}$

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) Seja o campo vetorial conservativo $\vec{F}(x, y, z) = ye^z\vec{i} + xe^z\vec{j} + xye^z\vec{k}$. Assinale na primeira coluna um potencial φ para $\vec{F}$ e na segunda coluna o valor de $W := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é curva parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = 2^t\vec{i} + t^2\vec{j} + \ln(1 + t)\vec{k}, \quad 1 \leq t \leq 3.$$

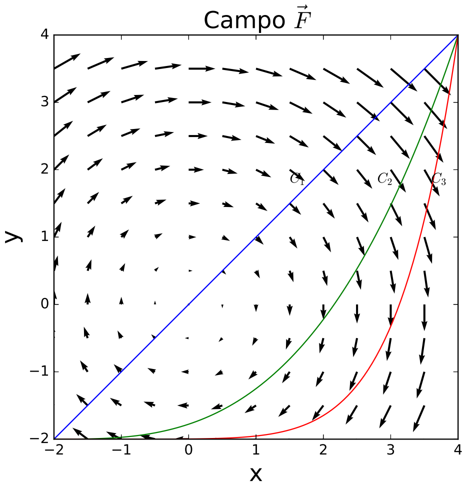
O potencial φ:

( ) $\varphi(x, y, z) = xe^z + C$
( ) $\varphi(x, y, z) = ye^z + C$
( ) $\varphi(x, y, z) = xye^z + C$
( ) $\varphi(x, y, z) = xze^y + C$
( ) $\varphi(x, y, z) = zye^x + C$
( ) $\varphi(x, y, z) = xye^x + C$

W :

( ) -288
( ) -284
( ) -147
( ) 147
( ) 284
( ) 288

• **Questão 5** (1.0 ponto) Considere o campo $\vec{F}(x,y,z) = f(x,y)\vec{i} + g(x,y)\vec{j}$ esboçado na figura ao lado e os caminhos C_1, C_2 e C_3 que começam no ponto $(4,4,0)$ e terminam no ponto $(-2,-2,0)$. Defina $W_1 = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $W_2 = \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ e $W_3 = \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$.



Assinale as alternativas corretas:

( ) $0 = W_1 = W_2 = W_3$

( ) $0 = W_1 < W_2 = W_3$

( ) $0 < W_1 = W_2 = W_3$

( ) $0 < W_1 < W_2 = W_3$

( ) $0 = W_1 < W_2 < W_3$

( ) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ em todos os pontos.

( ) $\vec{i} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} > 0$ em todos pontos.

( ) $\vec{i} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} < 0$ em todos pontos.

( ) $\vec{j} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ em todos pontos.

( ) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ em todos pontos.

• **Questão 6** (2 pontos): Considere o campo vetorial dado por

$$\vec{F} = z^2\vec{k}$$

e a região V limitada superiormente por

$$z = 1$$

e inferiormente por $x^2 + y^2 - z = 0$. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S que limita V orientada para fora usando:

- **Item a)** (1.0) Calcule o fluxo Φ via parametrização direta da superfície (sem usar o Teorema da Divergência).
- **Item b)** (1.0) Calcule o fluxo Φ usando o Teorema da Divergência.

• **Questão 7** (2 pontos) Considere o campo dado por $\vec{F} = 2xye^z\vec{i} - x^2\cos(z)\vec{j} + \cos(xyz)\vec{k}$ e caminho C que contorna no sentido ***horário*** a porção do plano xy limitada pelos eixos ordenados, a reta $x = 2$, a reta $y = 2$ e a hipérbole $xy = 1$.

Calcule a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, esboçando a região de integração.