UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2022/1
Prova da área I

1-5	6	7	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

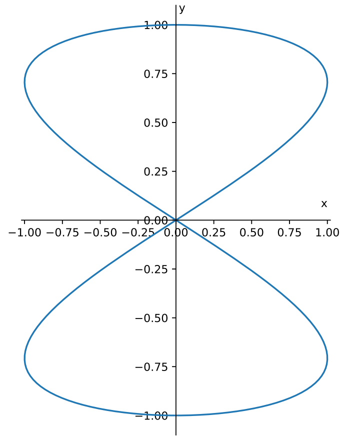
Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t))\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{r} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N} \end{aligned}$$

• **Questão 1a** (0.5 ponto cada item) Considere a trajetória parametrizada pela seguinte função vetorial:

$$\vec{r}(t) = \text{sen}(2t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}, \quad t \geq 0$$



Seja t_0 o primeiro instante positivo em que a trajetória passa pela origem.
Assinale na primeira coluna o valor de t_0. Na segunda coluna assinale o vetor tangente unitário à trajetória neste instante:

O parâmetro t_0:

( ) 0

( ) $\frac{\pi}{8}$

( ) $\frac{\pi}{4}$

(X) $\frac{\pi}{2}$

( ) $\frac{3\pi}{2}$

Tangente unitário em t_0:

( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}\left(2\vec{i} + \vec{j}\right)$

( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}\left(2\vec{i} - \vec{j}\right)$

( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}\left(-2\vec{i} + \vec{j}\right)$

(X) $\frac{\sqrt{5}}{5}\left(-2\vec{i} - \vec{j}\right)$

( ) Nenhuma das anteriores

• **Questão 1b** (0.5 ponto cada item) Considere a mesma trajetória da questão anterior. Assinale na primeira coluna os vetores binormais unitários, respectivamente, $t_1 := 0$ $t_2 := \pi$. Na segunda coluna, assinale o valor da curvatura nesses pontos, que são idênticos:

$\vec{B}(0)$ e $\vec{B}(\pi)$:

( ) $\vec{k}$ e $\vec{k}$

( ) $\vec{k}$ e $-\vec{k}$

(X) $-\vec{k}$ e $\vec{k}$

( ) $-\vec{k}$ e $-\vec{k}$

( ) Nenhuma das anteriores

$\kappa(0) = \kappa(\pi)$:

( ) 0

(X) 1/4

( ) 1/2

( ) 1

( ) 2

A trajetória passa pela origem quando $\text{sen}(2t) = 0$ e $\cos(t) = 0$. Da segunda condição, temos $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ Da primeira condição, temos $t = n\frac{\pi}{2}$. O primeiro instante positivo que satisfaz ambas as condições é $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Para obter o vetor tangente, calculamos a derivada:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= 2\cos(2t)\vec{i} - \text{sen}(t)\vec{j} \\
\vec{r}\,'(\pi/2) &= -2\vec{i} - \vec{j} \\
\vec{T}(\pi/2) &= \frac{-2\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(-2\vec{i} - \vec{j}\right)
\end{aligned}$$

Do gráfico, é fácil a orientação do vetor tangente nos pontos dados. Para a curvatura condireramos as duas derivadas:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= 2\cos(2t)\vec{i} - \text{sen}(t)\vec{j} \\
\vec{r}\,''(t) &= -4\,\text{sen}(2t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} \\
\vec{r}\,'(0) &= 2\vec{i} \\
\vec{r}\,''(0) &= -\vec{j}
\end{aligned}$$

Assim:

$$\kappa(0) = \frac{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3} = \frac{\|-2\vec{k}\|}{\|2\vec{i}\|^3} = \frac{1}{4}$$

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Considere a trajetória dada pela parametrização a seguir:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \mathrm{sen}(t)\vec{j} + \frac{1}{2}t^2\vec{k}$$

Assinale as alternativas que indicam respectivamente a norma da velocidade e a torção no ponto $t = \pi$.

( ) $\pi^2 + 1$
( ) $\pi^2 + 2$
(X) $\sqrt{\pi^2 + 1}$
( ) $\sqrt{\pi^2 + 2}$
( ) N. d. a.

( ) $\dfrac{\pi}{\pi^2 + 1}$
(X) $\dfrac{\pi}{\pi^2 + 2}$
( ) $\dfrac{\pi}{\pi^2 - 1}$
( ) $\dfrac{\pi}{\pi^2 - 2}$
( ) N. d. a.

A norma da velocidade é $v(\pi) = \|\vec{r}\,'(\pi)\| = \sqrt{1 + \pi^2}$. A torção é dada por:

$$\tau(\pi) = \frac{\left(-\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}\right) \cdot \vec{j}}{\| -\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}\|^2} = \frac{\pi}{2 + \pi^2}$$

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) A temperatura em um ponto $P(x, y)$ de uma placa é dada por:

$$T(x, y) = \frac{xy}{1 + xy}$$

As dimensões da placa são $0 \leq x, y \leq 4$. Em relação ao ponto $(1, 2)$, assinale na primeira coluna o vetor unitário $\vec{u}$ na direção e sentido da maior taxa de variação da temperatura e na segunda coluna, a intensidade dessa maior taxa de variação:

( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}(\vec{i} + 2\vec{j})$	( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
(X) $\frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{i} + \vec{j})$	( ) $\frac{\sqrt{3}}{9}$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}(\vec{i} - 2\vec{j})$	( ) $\frac{\sqrt{5}}{45}$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}(-2\vec{i} + \vec{j})$	( ) $\frac{\sqrt{15}}{45}$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}(-\vec{i} + 2\vec{j})$	( ) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
( ) $\frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{i} - \vec{j})$	(X) $\frac{\sqrt{5}}{9}$

Em relação ao ponto $(1, 2)$, assinale na primeira coluna o vetor unitário $\vec{u}$ na direção e sentido da maior taxa de variação da temperatura e na segunda coluna, a intensidade dessa maior taxa de variação:

Solução: Primeiro calculamos o gradiente. A intensidade da maior taxa de variação é a norma do gradiente e a direção é a própria direção do gradiente.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}T(x, y) &= \frac{y\vec{i} + x\vec{j}}{(1 + xy)^2} \\
\vec{\nabla}T(1, 2) &= \frac{2\vec{i} + \vec{j}}{9} \\
\|\vec{\nabla}T(1, 2)\| &= \frac{\sqrt{2^2 + 1^2}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{9} \\
\vec{u} &= \frac{\vec{\nabla}T(1, 2)}{\|\vec{\nabla}T(1, 2)\|} = \frac{2\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{i} + \vec{j})
\end{aligned}$$

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) Seja o campo vetorial conservativo $\vec{F}(x,y,z) = ye^z\vec{i} + xe^z\vec{j} + xye^z\vec{k}$. Assinale na primeira coluna um potencial φ para $\vec{F}$ e na segunda coluna o valor de $W := \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C é curva parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = 2^t\vec{i} + t^2\vec{j} + \ln(1+t)\vec{k}, \quad 1 \le t \le 3.$$

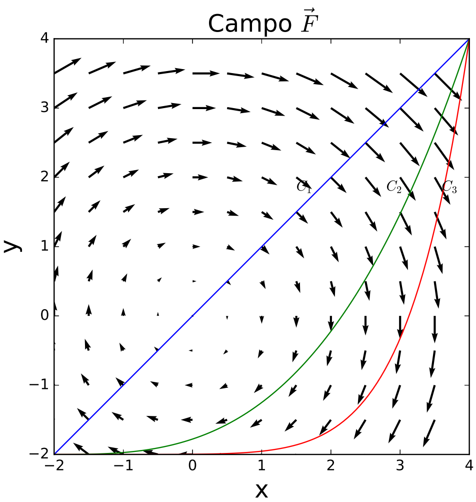
O potencial φ:	W :
( ) $\varphi(x,y,z) = xe^z + C$	( ) -288
( ) $\varphi(x,y,z) = ye^z + C$	( ) -284
(X) $\varphi(x,y,z) = xye^z + C$	( ) -147
( ) $\varphi(x,y,z) = xze^y + C$	( ) 147
( ) $\varphi(x,y,z) = zye^x + C$	(X) 284
( ) $\varphi(x,y,z) = xye^x + C$	( ) 288

O potencial é $\varphi(x,y,z) = xye^z + C$. Vemos que:

$$\begin{aligned}\vec{r}(1) &= 2\vec{i} + \vec{j} + \ln(2)\vec{k}\\ \vec{r}(3) &= 8\vec{i} + 9\vec{j} + \ln(4)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W &= \varphi(8,9,\ln(4)) - \varphi(1,0,0)\\ &= 8\cdot 9\cdot e^{\ln 4} - 2\cdot 1\cdot e^{\ln 2}\\ &= 72\cdot 4 - 2\cdot 2 = 284\end{aligned}$$

• **Questão 5** (1.0 ponto) Considere o campo $\vec{F}(x,y,z) = f(x,y)\vec{i} + g(x,y)\vec{j}$ esboçado na figura ao lado e os caminhos C_1, C_2 e C_3 que começam no ponto $(4,4,0)$ e terminam no ponto $(-2,-2,0)$. Defina $W_1 = \int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, $W_2 = \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ e $W_3 = \int_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}$.



Assinale as alternativas corretas:

( ) $0 = W_1 = W_2 = W_3$	( ) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$ em todos os pontos.
( ) $0 = W_1 < W_2 = W_3$	( ) $\vec{i}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} > 0$ em todos pontos.
( ) $0 < W_1 = W_2 = W_3$	( ) $\vec{i}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} < 0$ em todos pontos.
( ) $0 < W_1 < W_2 = W_3$	(X) $\vec{j}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ em todos pontos.
(X) $0 = W_1 < W_2 < W_3$	( ) $\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ em todos pontos.

• **Questão 6** (2 pontos): Considere o campo vetorial dado por

$$\vec{F} = z^2\vec{k}$$

e a região V limitada superiormente por

$$z = 1$$

e inferiormente por $x^2 + y^2 - z = 0$. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S que limita V orientada para fora usando:

- **Item a)** (1.0) Calcule o fluxo Φ via parametrização direta da superfície (sem usar o Teorema da Divergência).
- **Item b)** (1.0) Calcule o fluxo Φ usando o Teorema da Divergência.

Solução do item a: Para integral na porção inferior:

$$G(x,y,z) = z - x^2 - y^2 \Longrightarrow \vec{\nabla}G(x,y,z) = -2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}.$$

Assim

$$\vec{F}\cdot\vec{\nabla}G(x,y,z) = z^2 = (x^2+y^2)^2$$

$$\begin{aligned}
\Phi_t &= \pm\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS \\
&= -\iint \vec{F}\cdot\vec{\nabla}G(x,y,z)dA \\
&= -\iint (x^2+y^2)^2dA \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^4)rdrd\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5drd\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Para a integral da porção superior, escrevemos:

$$\begin{aligned}
\Phi_b &= \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS \\
&= \iint_S (z^2\vec{k})\cdot(\vec{k})dA \\
&= \iint_S dA = \pi
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\Phi = \Phi_t + \Phi_b = \frac{2}{3}\pi$$

Solução do item b: O divergente de $\vec{F}$ é dado por:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 2z.$$

Assim:

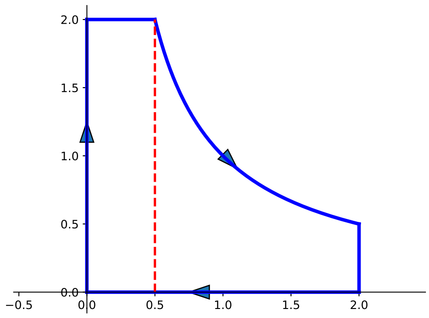
$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 (2z)rdzdrd\theta \\
&= 2\pi\int_0^1 r\left(\int_{r^2}^1 2zdz\right)dr \\
&= 2\pi\int_0^1 r\left(1-r^4\right)dr \\
&= 2\pi\int_0^1 \left(r-r^5\right)dr \\
&= 2\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

• **Questão 7** (2 pontos) Considere o campo dado por $\vec{F} = 2xye^z\vec{i} - x^2\cos(z)\vec{j} + \cos(xyz)\vec{k}$ e caminho C que contorna no sentido ***horário*** a porção do plano xy limitada pelos eixos ordenados, a reta $x = 2$, a reta $y = 2$ e a hipérbole $xy = 1$.

Calcule a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, esboçando a região de integração.

Usamos o teorema de Stokes:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = -\iint \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} dS$$



$$\begin{aligned}
-\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \\ 2xye^z & -x^2\cos(z) & \cos(xyz) \end{vmatrix} \\
\\
&= 2x\cos(z) + 2xe^z = 4x, \text{ em } z = 0
\end{aligned}$$

Agora calulamos:

$$\begin{aligned}
W &= \iint (4x) dS = 4\int_0^{1/2}\int_0^2 xdydx + 4\int_{1/2}^2\int_0^{1/x} xdydx \\
&= 8\int_0^{1/2} xdx + 4\int_{1/2}^2 dx = 1 + 6 = 7
\end{aligned}$$