1-2	3	4	Total

UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2022/1
Prova da área I

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas (dissertativas)

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}\,'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\lVert\vec{a}\times\vec{v}\rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

- **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considerando a trajetória parametrizada pela seguinte função vetorial:

$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + \cos(t^2)\vec{j} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}, \quad t \geq 0,$$

está correto:

(A) tangente unitário $T(t) =$:

( ) $\dfrac{2t\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{2t\vec{i} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2}}$

( ) Nenhuma das anteriores

(B) aceleração $\vec{a}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} =$:

( ) $2\vec{i} - (2\operatorname{sen}(t^2) + 4t^2\cos(t^2))\vec{j} + (4t^2\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{k}$

( ) $2\vec{i} - (2\operatorname{sen}(t^2) + 2t\cos(t^2))\vec{j} + (2t\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{k}$

( ) $2\vec{i} - 2t\cos(t^2)\vec{j} + 2t\operatorname{sen}(t^2)\vec{k}$

( ) $2\vec{i} + (4t^2\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{j} - (4t^2\cos(t^2) + 2\operatorname{sen}(t^2))\vec{k}$

( ) Nenhuma das anteriores

(C) vetor normal unitário $\vec{N}(t) =$:

( ) $\dfrac{\vec{i} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}$

( ) $-\cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - \cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) Nenhuma das anteriores

(D) vetor binormal $\vec{B}(t) =$:

( ) $\dfrac{t\vec{i} + \cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+t^2}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + \cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{-\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{-t\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+t^2}}$

( ) Nenhuma das anteriores

(E) curvatura em $t = \sqrt{\pi}$:

( ) $\kappa(\sqrt{\pi}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

( ) $\kappa(\sqrt{\pi}) = \sqrt{2}$

( ) $\kappa(\sqrt{\pi}) = 2\sqrt{2}$

( ) $\kappa(\sqrt{\pi}) = 2$

( ) Nenhuma das anteriores

(F) torção em $t = \sqrt{\pi}$:

( ) $\tau(\sqrt{\pi}) = 2$

( ) $\tau(\sqrt{\pi}) = \dfrac{1}{2}$

( ) $\tau(\sqrt{\pi}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

( ) $\tau(\sqrt{\pi}) = \sqrt{2}$

( ) Nenhuma das anteriores

(G) aceleração tangencial em $t = \sqrt{\pi}$:

( ) $2\sqrt{2}$

( ) 0

( ) $\sqrt{\pi}$

( ) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$

( ) Nenhuma das anteriores

(H) aceleração normal em $t = \sqrt{\pi}$:

( ) 0

( ) $2\sqrt{\pi}$

( ) 4π

( ) $4\sqrt{\pi}$

( ) Nenhuma das anteriores

- **Questão 2** (1.0 ponto cada item) Considerando a superfície parametrizada (guarda-chuva de Whitney)

$$\vec{r} = uv\vec{i} + u\vec{j} + v^2\vec{k}$$

no ponto em que $u = 8$, $v = 2$, é correto:

(A) vetor normal unitário $\vec{N}$:

( ) $\dfrac{\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}}{3}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{3}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$

( ) Nenhuma das anteriores

(B) equação cartesiana do plano tangente

( ) $(x-16) + 2(y-8) - 2(z-4) = 0$

( ) $(x-16) - \dfrac{y-8}{2} - \dfrac{z-4}{2} = 0$

( ) $16(x-1) + 8(y+2) + 4(z+2) = 0$

( ) $(x-16) - 2(y-8) + 2(z-4) = 0$

( ) Nenhuma das anteriores

Há questões na página seguinte.

• **Questão 3.** Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = (2x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+x\vec{k}$ e a curva C dada por $\vec{r} = \cos(\pi t)\vec{i}+\operatorname{sen}(\pi t)\vec{j}+\pi t\vec{k}$, $0 \le t \le 1$.

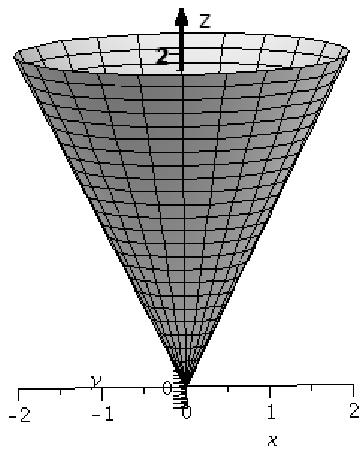
• **Item a)** (1.0pt) Determine se $\vec{F}$ é um campo conservativo indicando, se existir, o respectivo potencial $g(x,y,z)$ (nulo na origem).

• **Item b)** (1.0pt) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

• **Questão 4.** Seja o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$. Seja S a superfície (figura ao lado) parametrizada por

$$\vec{r}(t) = r\cos(\theta)\vec{i} + r\operatorname{sen}(\theta)\vec{j} + r\vec{k}, \quad 0 \le r \le 2; 0 \le \theta \le 2\pi$$

e seja o disco $D = \{(x,y,2) : x^2+y^2 \le 2^2\}$, orientado no sentido z positivo (como superfície). Observe que a união de S com D limita um sólido (volume) que denotaremos por G.



• **Item a)** (1.0pt) Calcule $\iint_D \vec{F}\cdot\vec{n}dS$. Se for usar (ρ,θ) na integração, observe que nesse disco D temos $dS = dA = \rho d\rho d\theta$.

• **Item b)** (1.0pt) Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$ depois de aplicar o Teorema do Divergente no volume G.

Bom Trabalho.