UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2022/1
Prova da área I

1-2	3	4	Total

Nome: GABARITO **Cartão:** __________

- **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considerando a trajetória parametrizada pela seguinte função vetorial:

$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + \cos(t^2)\vec{j} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}, \quad t \geq 0,$$

está correto:

(A) tangente unitário $\vec{T}(t) =$:

( ) $\dfrac{2t\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2}}$

(X) $\dfrac{\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{2t\vec{i} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2}}$

( ) Nenhuma das anteriores

Solução: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = 2t\vec{i} - 2t\operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - 2t\cos(t^2)\vec{k}$

$\Rightarrow \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = 2\sqrt{2}t$

$\Rightarrow \vec{T} = \dfrac{2t\vec{i} - 2t\operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - 2t\cos(t^2)\vec{k}}{2\sqrt{2}t} =$

$= \dfrac{\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

(B) aceleração $\vec{a}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} =$:

(X) $2\vec{i} - (2\operatorname{sen}(t^2) + 4t^2\cos(t^2))\vec{j} + (4t^2\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{k}$

( ) $2\vec{i} - (2\operatorname{sen}(t^2) + 2t\cos(t^2))\vec{j} + (2t\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{k}$

( ) $2\vec{i} - 2t\cos(t^2)\vec{j} + 2t\operatorname{sen}(t^2)\vec{k}$

( ) $2\vec{i} + (4t^2\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{j} - (4t^2\cos(t^2) + 2\operatorname{sen}(t^2))\vec{k}$

( ) Nenhuma das anteriores

Solução: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = 2t\vec{i} - 2t\operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - 2t\cos(t^2)\vec{k}$ implica $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{i} - (2\operatorname{sen}(t^2) + 4t^2\cos(t^2))\vec{j} + (4t^2\operatorname{sen}(t^2) - 2\cos(t^2))\vec{k}$

(C) vetor normal unitário $\vec{N}(t) =$:

( ) $\dfrac{\vec{i} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}$

(X) $-\cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - \cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) Nenhuma das anteriores

Solução: $\dfrac{d\vec{T}}{dt} = -\sqrt{2}t\cos(t^2)\vec{j} + \sqrt{2}t\operatorname{sen} t^2\vec{k}$

$\Rightarrow \left|\dfrac{d\vec{T}}{dt}\right| = \sqrt{2}t$

$\Rightarrow \vec{N} = \dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|} = -\cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen} t^2\vec{k}$

(D) vetor binormal $\vec{B}(t) =$:

( ) $\dfrac{t\vec{i} + \cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+t^2}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + \cos(t^2)\vec{j} + \operatorname{sen}(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

(X) $\dfrac{-\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{-t\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{1+t^2}}$

( ) Nenhuma das anteriores

Solução: $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\operatorname{sen}(t^2)}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\cos(t^2)}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\cos(t^2) & \operatorname{sen}(t^2) \end{vmatrix} =$

$= \dfrac{-\vec{i} - \operatorname{sen}(t^2)\vec{j} - \cos(t^2)\vec{k}}{\sqrt{2}}$

(E) curvatura em $t = \sqrt{\pi}$:

( ) $\kappa(\sqrt{\pi}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

( ) $\kappa(\sqrt{\pi}) = \sqrt{2}$

( ) $\kappa(\sqrt{\pi}) = 2\sqrt{2}$

( ) $\kappa(\sqrt{\pi}) = 2$

(X) Nenhuma das anteriores

Solução: em qualquer instante t

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{\sqrt{2}t}{2\sqrt{2}t} = \frac{1}{2}$$

(F) torção em $t = \sqrt{\pi}$:

( ) $\tau(\sqrt{\pi}) = 2$

(X) $\tau(\sqrt{\pi}) = \dfrac{1}{2}$

( ) $\tau(\sqrt{\pi}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

( ) $\tau(\sqrt{\pi}) = \sqrt{2}$

( ) Nenhuma das anteriores

Solução: em qualquer instante t

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = -\sqrt{2}t\cos(t^2)\vec{j} + \sqrt{2}t\,\mathrm{sen}\,t^2\vec{k} \Rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt}(\sqrt{\pi}) = -\sqrt{2}\sqrt{\pi}\vec{j}$$

por outro lado

$$\vec{N}(\sqrt{\pi}) = -\cos(\pi)\vec{j} + \mathrm{sen}\,\pi\vec{k} = \vec{j};\ \frac{ds}{dt}(\sqrt{\pi}) = 2\sqrt{2}\sqrt{\pi}$$

implica $\dfrac{d\vec{B}}{ds} = \dfrac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = -\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\vec{j} = -\dfrac{1}{2}\vec{j} = -\dfrac{1}{2}\vec{N} \Rightarrow \tau = \dfrac{1}{2}$

(G) aceleração tangencial em $t = \sqrt{\pi}$:

(X) $2\sqrt{2}$

( ) 0

( ) $\sqrt{\pi}$

( ) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$

( ) Nenhuma das anteriores

Solução: em $t = \sqrt{\pi}$: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = 2\sqrt{\pi}\vec{i} + 0\vec{j} + 2\sqrt{\pi}\vec{k}$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{i} + 4\pi\vec{j} + 2\vec{k}, \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = 2\sqrt{2}\sqrt{\pi}$$

$$a_T = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{8\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{2}$$

(H) aceleração normal em $t = \sqrt{\pi}$:

( ) 0

( ) $2\sqrt{\pi}$

(X) 4π

( ) $4\sqrt{\pi}$

( ) Nenhuma das anteriores

Solução: em $t = \sqrt{\pi}$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 8\pi\sqrt{\pi}\vec{i} - 8\pi\sqrt{\pi}\vec{k} \Rightarrow \left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = 8\sqrt{2}\pi\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow a_N = \frac{\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{8\sqrt{2}\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}} = 4\pi$$

• **Questão 2** (1.0 ponto cada item) Considerando a superfície parametrizada (guarda-chuva de Whitney) $\vec{r} = uv\vec{i} + u\vec{j} + v^2\vec{k}$ no ponto em que $u = 8$, $v = 2$, é correto:

(A) vetor normal unitário $\vec{N}$:

(X) $\dfrac{\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}}{3}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{3}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}$

( ) Nenhuma das anteriores

Solução: $\dfrac{d\vec{r}}{du} = v\vec{i} + \vec{j}$, $\dfrac{d\vec{r}}{dv} = u\vec{i} + 2v\vec{k}$

em $u = 8, v = 2$: $\dfrac{d\vec{r}}{du} = 2\vec{i} + \vec{j}$; $\dfrac{d\vec{r}}{dv} = 8\vec{i} + 4\vec{k}$

$$\frac{d\vec{r}}{du} \times \frac{d\vec{r}}{dv} = 4\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{4\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}}{\left|4\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}\right|} = \frac{\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}}{3}$$

(B) equação cartesiana do plano tangente

( ) $(x - 16) + 2(y - 8) - 2(z - 4) = 0$

( ) $(x - 16) - \dfrac{y - 8}{2} - \dfrac{z - 4}{2} = 0$

( ) $16(x - 1) + 8(y + 2) + 4(z + 2) = 0$

( ) $(x - 16) - 2(y - 8) + 2(z - 4) = 0$

(X) Nenhuma das anteriores

Solução: em $u = 8, v = 2$ temos $\vec{r} = 16\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$, que corresponde ao ponto $(x_0, y_0, z_0) = (16, 8, 4)$ e portanto a equação do plano tangente é

$$(x - 16) - 2(y - 8) - 2(z - 4) = 0$$

• **Questão 3.** Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = (2x + z)\vec{i} + 2y\vec{j} + x\vec{k}$ e a curva C dada por $\vec{r} = \cos(\pi t)\vec{i} + \mathrm{sen}(\pi t)\vec{j} + \pi t\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

• **Item a)** (1.0pt) Determine se $\vec{F}$ é um campo conservativo indicando, se existir, o respectivo potencial $g(x, y, z)$ (nulo na origem).

• **Item b)** (1.0pt) Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução: (a) Cálculo do rotacional de $\vec{F}$:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x+z & 2y & x \end{vmatrix} = \vec{i}(0) - \vec{j}(1-1) + \vec{k}(0) = \vec{0} \text{ portanto o campo } \vec{F} \text{ é conservativo.}$$

Cálculo do potencial g: $g_x = 2x + z \Rightarrow g = x^2 + xz + p(y,z)$

$2y = g_y = 0 + 0 + \dfrac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow p = y^2 + q(z) \Rightarrow g = x^2 + y^2 + xz + q(z)$

$x = g_z = x + \dfrac{dq}{dz} \Rightarrow q$ é constante. Ademais, $g(\vec{0}) = 0$ finalmente implica $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + xz$

(b) Como o campo é conservativo e tem potencial g:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = g(\vec{r}(1)) - g(\vec{r}(0)) = g(-1,0,\pi) - g(1,0,0) = (-1)^2 + 0^2 + (-1)\pi - ((1)^2 + 0^2 + (1)(0)) = -\pi$$

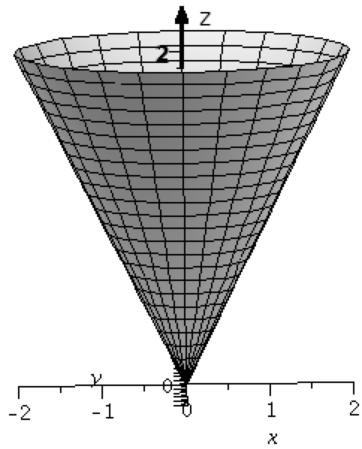
• **Questão 4.** Seja o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$. Seja S a superfície (figura ao lado) parametrizada por

$$\vec{r}(t) = r\cos(\theta)\vec{i} + r\,\text{sen}(\theta)\vec{j} + r\vec{k}, \quad 0 \le r \le 2; 0 \le \theta \le 2\pi$$

e seja o disco $D = \{(x,y,2) : x^2 + y^2 \le 2^2\}$, orientado no sentido z positivo (como superfície). Observe que a união de S com D limita um sólido (volume) que denotaremos por G.

• **Item a)** (1.0pt) Calcule $\displaystyle\iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS$. Se for usar (ρ, θ) na integração, observe que nesse disco D temos $dS = dA = \rho d\rho d\theta$.

• **Item b)** (1.0pt) Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ depois de aplicar o Teorema do Divergente no volume G.



Solução: (a) temos $\vec{N} = \vec{k}$, por outro lado, o disco D é a superfície parametrizada por

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\,\text{sen}(\theta) \quad 0 \le \theta \le 2\pi; 0 \le \rho \le 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Assim, $\displaystyle\iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} zx^2 dA = 2\int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos^2(\theta) \rho d\rho d\theta = 2\int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta =$

$= 2\left(\dfrac{2^4}{4} - \dfrac{0^4}{4}\right) \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{1+\cos(4\theta)}{2} d\theta = 2(4)\pi = 8\pi$

(b) divergente de $\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = y^2 + z^2 + x^2$ Pelo Teorema do Divergente, $\displaystyle\iint_{D \bigcup S} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_G \nabla \cdot \vec{F} dV$

(i) Integração do divergente no volume G, usando (x,y,z)

$$\iiint_G \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_0^2 \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2) dx dy dz = \int_0^2 \int_{-z}^{z} \frac{2\sqrt{z^2-y^2}(2y^2+4z^2)}{3} dy dz$$

uma vez que $\displaystyle\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2) dx = 2\left[\frac{x^3}{3} + x(y^2+z^2)\right]_0^{\sqrt{z^2-y^2}} = 2\left[x\frac{x^2+3(y^2+z^2)}{3}\right]_0^{\sqrt{z^2-y^2}}$

continuando, fazemos $y = z\,\text{sen}(u)$, $0 \le u \le \pi/2$, onde $dy = z\cos(u)du$

$\displaystyle\int_{-z}^{z} \frac{2\sqrt{z^2-y^2}(2y^2+4z^2)}{3} dy = \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} z\cos(u)(2z^2\,\text{sen}^2(u) + 4z^2) z\cos(u) du = \frac{8z^4}{3}\int_0^{\pi/2} (\cos^2(u)\,\text{sen}^2(u) + 2\cos^2(u)) du = \frac{8z^4}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\text{sen}^2(2u)}{4} + 2\cos^2(u)\right) du = \frac{8z^4}{3}\left(\frac{1}{4}\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{8z^4}{3}\frac{\pi}{4}\frac{9}{4} = \frac{3\pi z^4}{2}$

e finalmente, $\displaystyle\iiint_G \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_0^2 \frac{3\pi z^4}{2} dz = \frac{3\pi}{2}\frac{2^5}{5} = \frac{48\pi}{5}$

(ii) usando coordenadas cilíndricas (θ, ρ, z), $x = \rho\cos(\theta), y = \rho\,\text{sen}(\theta)$, $x^2 + y^2 = \rho^2$, $0 \le \rho \le z \le 2$

$\displaystyle\iiint_G \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^z (\rho^2 + z^2) \rho d\rho dz d\theta = 2\pi \int_0^2 (\rho^3 + \rho z^2) d\rho dz = 2\pi \int_0^2 \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2 z^2}{2}\right]_0^z dz = 2\pi \int_0^2 \frac{3z^4}{4} dz = \frac{3\pi}{2}\frac{2^5}{5} = \frac{48\pi}{5}$

Finalmente, $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_G \nabla \cdot \vec{F} dV - \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \frac{48\pi}{5} - 8\pi = \frac{8\pi}{5}$ □