UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turmas D e D2 - 2022/1
Prova da área I

1-5	6	7	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

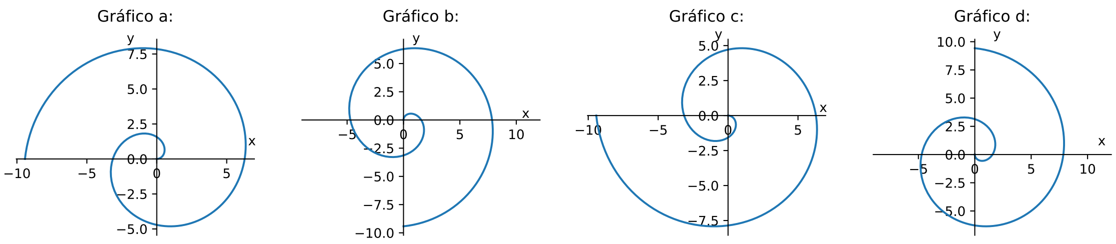
Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\Vert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\Vert}$
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}\,'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considere a trajetória parametrizada pela seguinte função vetorial e os gráficos dados em seguida:

$$\vec{r}(t) = t\,\mathrm{sen}(t)\vec{i} + t\cos(t)\vec{j}, \quad t \geq 0$$



Assinale na primeira coluna o gráfico correspondente à função dada. Na segunda coluna, assinale o vetor tangente unitário no instante $t = \pi$. Na terceira coluna, indique o vetor normal unitário em $t = \pi$. Na quarta coluna, indique a curvatura em $t = \pi$.

O gráfico:
- ( ) a)
- ( ) b)
- ( ) c)
- ( ) d)

Vetor $\vec{T}(\pi)$:
- ( ) $\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\left(\pi\vec{i}+\vec{j}\right)$
- ( ) $\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\left(\pi\vec{i}-\vec{j}\right)$
- ( ) $\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\left(-\pi\vec{i}+\vec{j}\right)$
- ( ) $\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\left(-\pi\vec{i}-\vec{j}\right)$
- ( ) N. d. a.

Vetor $\vec{N}(\pi)$:
- ( ) $\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\left(\vec{i}+\pi\vec{j}\right)$
- ( ) $\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\left(\vec{i}-\pi\vec{j}\right)$
- ( ) $\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\left(-\vec{i}+\pi\vec{j}\right)$
- ( ) $\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\left(-\vec{i}-\pi\vec{j}\right)$
- ( ) N. d. a.

$\kappa(\pi)$
- ( ) $\frac{\pi^2-1}{(\pi^2+2)^{3/2}}$
- ( ) $\frac{\pi^2+1}{(\pi^2+2)^{3/2}}$
- ( ) $\frac{\pi^2-2}{(\pi^2+1)^{3/2}}$
- ( ) $\frac{\pi^2+2}{(\pi^2+1)^{3/2}}$
- ( ) N. d. a.

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Considere a trajetória dada pela parametrização a seguir:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \mathrm{sen}(t)\vec{j} + \frac{1}{3}t^3\vec{k}$$

Assinale as alternativas que indicam respectivamente a norma da velocidade e a torção no ponto $t = 0$.

( ) 0	( ) -2
( ) 1	( ) -1
( ) 2	( ) 0
( ) 3	( ) 1
( ) 4	( ) 2

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) A temperatura em um ponto $P(x, y, z)$ de uma sala é dada por:

$$T(x, y, z) = 300 - 2\left(x^2 + y^2\right)$$

Uma abelha está no ponto $(3, 4, 1)$ e com velocidade dada por $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$. Na primeira coluna, assinale a alternativa que melhor aproxima a taxa de variação (por unidade de comprimento) na direção e sentido da abelha. Na segunda coluna, a alternativa que melhor aproxima a derivada temportal da temperatura experimentada pela abelha (por unidade de tempo).

( ) - 9,6	( ) -96
( ) - 7,4	( ) -48
( ) - 2,1	( ) -36
( ) 3,4	( ) 36
( ) 6,5	( ) 48
( ) 9,3	( ) 96

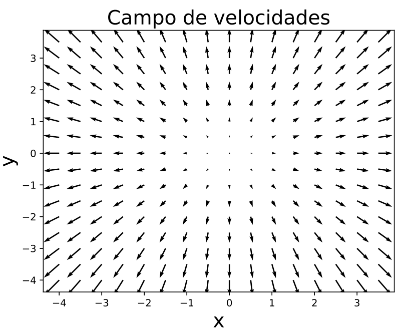
• **Questão 4** (0.50 ponto cada item) Considere os campos dados por

$$\begin{aligned}
f &= \cos(x^2+y^2+z^2) \\
g &= z^3 \\
\vec{F} &= \cos(y)\vec{i} + \mathrm{sen}(x)\vec{j} + e^z\vec{k} \\
h_1 &= \vec{\nabla}g \cdot \vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{\nabla}f\right) \\
h_2 &= \vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g
\end{aligned}$$

Na primeira coluna, assinale a alternativa que apresenta h_1. Na segunda coluna, assinale a alternativa que apresenta h_2.

( ) $2z(\cos(x) + \mathrm{sen}(y))$	( ) $6z^2\cos(x^2+y^2+z^2)$
( ) $3z^2(\cos(x) - \mathrm{sen}(y))$	( ) $6z^3\,\mathrm{sen}(x^2+y^2+z^2)$
( ) $2z(-\cos(x) + \mathrm{sen}(y))$	( ) $-6z^2\,\mathrm{sen}(x^2+y^2+z^2)$
( ) $3z^2(\cos(x) + \mathrm{sen}(y))$	( ) $-6z^3\cos(x^2+y^2+z^2)$
( ) $-2z(\cos(x) + \mathrm{sen}(y))$	( ) $-6z^3\,\mathrm{sen}(x^2+y^2+z^2)$

• **Questão 5** (0.5 ponto cada) Considere o campo central $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ em $f(r)$ é uma função diferenciável e seu gráfico é esboçado ao lado. Em cada coluna assinale uma alternativa correta.



( ) O divergente é nulo em todos os pontos.

( ) O divergente é não-negativo em todos os pontos.

( ) O divergente é não-positivo em todos os pontos.

( ) O divergente é nulo no ponto $(1, 1)$.

( ) O divergente não existe no ponto $(-3, -3)$.

( ) O campo é irrotacional.

( ) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ somente no ponto $(0, 0)$.

( ) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} > 0$ somente na região $x < 0$.

( ) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} > 0$ em todos os pontos, exceto na origem.

( ) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} < 0$ em todos os pontos, exceto na origem.

• **Questão 6** (2.0 pontos): Seja Φ o fluxo do campo

$$\vec{F} = z\vec{k}$$

através da superfície que envolve a região limitada inferiormente pelo cone

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z$$

e superiormente pelo plano $z = 1$ orientada para fora.

• **Item a)** (1.0) Encontre o fluxo Φ via parametrização direta da superfície (sem usar o Teorema da Divergência).

• **Item b)** (1.0) Calcule o fluxo Φ usando o Teorema da Divergência.

• **Questão 7** (2 pontos) Considere o campo dado por $\vec{F} = xz\vec{i} + x^2e^{y+z}\vec{j} + xz\vec{k}$ e caminho C dado pelo arco de parábola $y = x^2$ no plano xy que liga o ponto $P_1 = (0, 0, 0)$ até o ponto $P_2 = (2, 4, 0)$, o segmento de reta que liga P_2 a $P_3 = (0, 4, 0)$ e o segmento de reta que liga P_3 a P_1, no sentido $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$.

Calcule a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, esboçando a região de integração.