UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turmas D e D2 - 2022/1
Prova da área I

1-5	6	7	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - $ $-\left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} +$ $+\vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

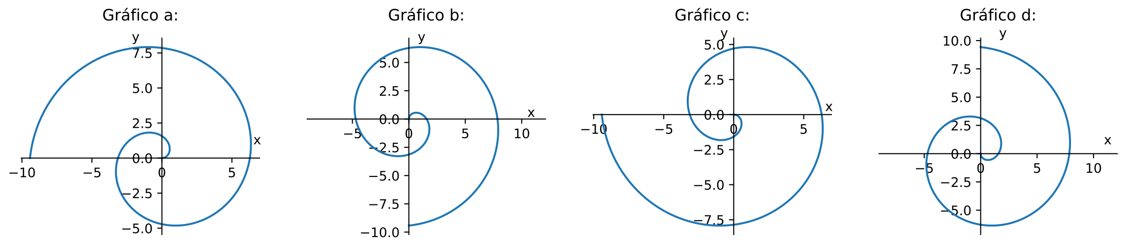
Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}\,'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\lVert\vec{a}\times\vec{v}\rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considere a trajetória parametrizada pela seguinte função vetorial e os gráficos dados em seguida:

$$\vec{r}(t) = t\,\mathrm{sen}(t)\vec{i} + t\cos(t)\vec{j}, \quad t \geq 0$$



Assinale na primeira coluna o gráfico correspondente à função dada. Na segunda coluna, assinale o vetor tangente unitário no instante $t = \pi$. Na terceira coluna, indique o vetor normal unitário em $t = \pi$. Na quarta coluna, indique a curvatura em $t = \pi$. Na quarta coluna.

Solução do item a): Para dissernir o gráfico correto, basta calcular o valor de $r(\vec{t})$ em alguns ângulos notáveis:

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\vec{i} \quad \text{e} \quad \vec{r}(\pi) = -\pi\vec{j}$$

Esse dois pontos já garantem que só pode ser a letra b).

Solução dos itens b), c) e d): Para os outros itens, calculamos as derivadas de $\vec{r}\,'(t)$:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= (\mathrm{sen}(t) + t\cos(t))\,\vec{i} + (\cos(t) - t\,\mathrm{sen}(t))\,\vec{j} \\
\vec{r}\,''(t) &= (2\cos(t) - t\,\mathrm{sen}(t))\,\vec{i} + (-2\,\mathrm{sen}(t) - t\cos(t))\,\vec{j} \\
\vec{r}\,'(\pi) &= -\pi\vec{i} - \vec{j} \\
\vec{r}\,''(\pi) &= -2\vec{i} + \pi\vec{j}
\end{aligned}$$

Normalizando, temos:

$$\vec{T}(\pi) = \frac{-\pi\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{\pi^2 + 1}}$$

Já o vetor normal unitário é dado por:

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \left(-\vec{k}\right) \times \frac{-\pi\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{\pi^2+1}} = \frac{\pi\vec{j} - \vec{i}}{\sqrt{\pi^2+1}} = \frac{-\vec{i} + \pi\vec{j}}{\sqrt{\pi^2+1}}$$

A curvatura é dada por:

$$\begin{aligned}
\kappa(\pi) &= \frac{\|\vec{r}\,'(\pi)| \times \vec{r}\,''(\pi)\|}{\|\vec{r}\,'(\pi)\|^3} = \frac{\left\|\left(-\pi\vec{i} - \vec{j}\right) \times \left(-2\vec{i} + \pi\vec{j}\right)\right\|}{\left\|-\pi\vec{i} - \vec{j}\right\|^3} \\
&= \frac{\left\|(-\pi^2 - 2)\vec{k}\right\|}{(\pi^2+1)^{3/2}} = \frac{\pi^2 + 2}{(\pi^2+1)^{3/2}}
\end{aligned}$$

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Considere a trajetória dada pela parametrização a seguir:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \mathrm{sen}(t)\vec{j} + \frac{1}{3}t^3\vec{k}$$

Assinale as alternativas que indicam respectivamente a norma da velocidade e a torção no ponto $t = 0$.

Calculamos as derivadas:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= -\,\mathrm{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + t^2\vec{k}, \\
\vec{r}\,''(t) &= -\cos(t)\vec{i} - \mathrm{sen}(t)\vec{j} + 2t\vec{k}, \\
\vec{r}\,'''(t) &= \mathrm{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + 2\vec{k}.
\end{aligned}$$

Agora substituímos em $t = 0$:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= \vec{j}, \\
\vec{r}\,''(t) &= -\vec{i}, \\
\vec{r}\,'''(t) &= -\vec{j} + 2\vec{k}.
\end{aligned}$$

A norma da velocidade é $\|\vec{r}\,'(t)\|| = \|\vec{j}\| = 1$.

Já a torção é dada por:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \cdot \vec{r}\,'''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|^2} \\
&= \frac{\vec{k} \cdot (-\vec{j} + 2\vec{k})}{1^2} = 2
\end{aligned}$$

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) A temperatura em um ponto $P(x, y, z)$ de uma sala é dada por:

$$T(x,y,z) = 300 - 2\left(x^2 + y^2\right)$$

Uma abelha está no ponto $(3, 4, 1)$ e com velocidade dada por $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$. Na primeira coluna, assinale a alternativa que melhor aproxima a taxa de variação (por unidade de comprimento) na direção e sentido da abelha. Na segunda coluna, a alternativa que melhor aproxima a derivada da temperatura experimentada pela abelha (por unidade de tempo).

Solução:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} T(x,y,z) &= -4x\vec{i} - 4y\vec{j} \\
\vec{\nabla} T(3,4,1) &= -12\vec{i} - 16\vec{j} \\
\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T(3,4,1) &= (4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}) \cdot (-12\vec{i} - 16\vec{j}) \\
&= -48 - 48 = -96 \\
\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{\nabla} T(3,4,1) &= \frac{-96}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = -\frac{96}{13} \approx -7,4
\end{aligned}$$

• **Questão 4** (0.50 ponto cada item) Considere os campos dados por

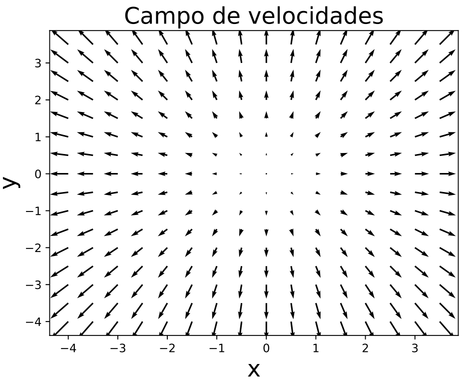
$$\begin{aligned}
f &= \cos(x^2+y^2+z^2)\\
g &= z^3\\
\vec{F} &= \cos(y)\vec{i}+\operatorname{sen}(x)\vec{j}+e^z\vec{k}\\
h_1 &= \vec{\nabla}g\cdot\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{\nabla}f\right)\\
h_2 &= \vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g
\end{aligned}$$

Na primeira coluna, assinale a alternativa que apresenta h_1. Na segunda coluna, assinale a alternativa que apresenta h_2.

$$\begin{aligned}
h_1 &= \vec{\nabla}g\cdot\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{\nabla}f\right)\\
&= \vec{\nabla}g\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F}\\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3z^2\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \cos(y) & \operatorname{sen}(x) & e^z \end{vmatrix}\\
&= 3z^2(\cos(x)+\operatorname{sen}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= \vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g\\
&= \vec{\nabla}g\cdot\vec{\nabla}f\\
&= 3z^2\vec{k}\cdot\vec{\nabla}f\\
&= 3z^2\frac{\partial f}{\partial z}\\
&= 3z^2(-2z)\operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)\\
&= -6z^3\operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)
\end{aligned}$$

• **Questão 5** (0.5 ponto cada) Considere o campo central $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ em $f(r)$ é uma função diferenciável e seu gráfico é esboçado ao lado. Em cada coluna assinale uma alternativa correta.



( ) O divergente é nulo em todos os pontos.

(X) O divergente é não-negativo em todos os pontos.

( ) O divergente é não-positivo em todos os pontos.

( ) O divergente é nulo no ponto $(1, 1)$.

( ) O divergente não existe no ponto $(-3, -3)$.

(X) O campo é irrotacional.

( ) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ somente no ponto $(0, 0)$.

( ) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} > 0$ somente na região $x < 0$.

( ) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} > 0$ em todos os pontos, exceto na origem.

( ) $\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} < 0$ em todos os pontos, exceto na origem.

• **Questão 6** (2.0 pontos): Seja Φ o fluxo do campo

$$\vec{F} = z\vec{k}$$

através da superfície que envolve a região limitada inferiormente pelo cone

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z$$

e superiormente pelo plano $z = 1$ orientada para fora.

• **Item a)** (1.0) Encontre o fluxo Φ via parametrização direta da superfície (sem usar o Teorema da Divergência).

• **Item b)** (1.0) Calcule o fluxo Φ usando o Teorema da Divergência.

Solução do item a: Escrevemos o fluxo Φ como a soma da contribuições da porção de cone inferiormente e o disco unitário no plano $z = 1$ superiormente.

$$\Phi_t = \iint_{S_t} \vec{F} \cdot \vec{k} dS = \iint_{S_t} dS = \pi$$

A porção de cone está numa superfície de nível da seguinte função escalar:

$$G(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Usaremos o teorema de mudança de variáveis:

$$\Phi_b = \iint_{S_t} \vec{F} \cdot \vec{k} dS = \pm \iint_A \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA$$

Onde o sinal é determinado conforme a orientação da superfície. Neste caso, escolhemos negativo porque a componente z do gradiente é positiva e a componente z da normal é negativa.

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G = z$$

$$\begin{aligned} \Phi_b &= \pm \int_0^{2\pi} \int_0^1 (z) \rho d\rho d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 d\rho d\theta = -\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\Phi = \Phi_t + \Phi_b = \frac{\pi}{3}$$

Solução do item b:

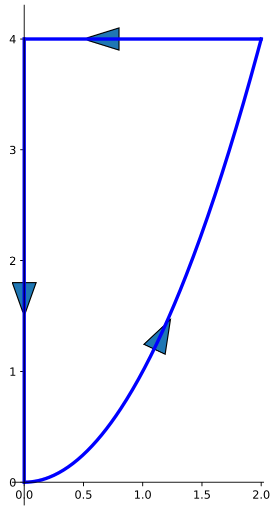
$$\begin{aligned} \Phi &= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_\rho^1 (1) \rho dz d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho) \rho d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^2) d\rho \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

• **Questão 7** (2 pontos) Considere o campo dado por $\vec{F} = xz\vec{i} + x^2e^{y+z}\vec{j} + xz\vec{k}$ e caminho C dado pelo arco de parábola $y = x^2$ no plano xy que liga o ponto $P_1 = (0,0,0)$ até o ponto $P_2 = (2,4,0)$, o segmento de reta que liga P_2 a $P_3 = (0,4,0)$ e o segmento de reta que liga P_3 a P_1, no sentido $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$.

Calcule a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, esboçando a região de integração.

Usamos o teorema de Stokes:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS = \iint \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} dS$$



$$\begin{aligned}
\vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & x^2e^{y+z} & xz \end{vmatrix} \\
&= 2xe^{y+z} = 2xe^y, \quad z = 0
\end{aligned}$$

Agora calulamos:

$$\begin{aligned}
W &= \iint 2xe^y dS = 2\int_0^2 \int_{x^2}^4 xe^y dydx \\
&= 2\int_0^2 x\left(e^4 - e^{x^2}\right) dx \\
&= 2e^4 \int_0^2 xdx - \int_0^2 2xe^{x^2} dx \\
&= 4e^4 - \int_0^4 e^u du \\
&= 4e^4 - (e^4 - 1) \\
&= 1 + 3e^4
\end{aligned}$$

Alternativamente, para resolver sem usar o teorema de Stokes, é um pouco mais trabalhoso. Escrevemos a integral de caminho fechado como a soma de três integrais:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 := \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
&C_1 : \vec{r}(t) = (2-t)\vec{i} + 4\vec{j}, \quad 0 \le t \le 2 \\
&C_2 : \vec{r}(t) = (4-t)\vec{j}, \quad 0 \le t \le 4 \\
&C_3 : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}, \quad 0 \le t \le 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_1 &= \int_0^2 xz(-t)dt = 0 \\
W_2 &= \int_0^4 x^2e^{y+z}(-t)dt = 0 \\
W_3 &= \int_0^2 \left[xz + x^2e^{y+z}(2t)\right] dt \\
&= 2\int_0^2 t^3e^{t^2} dt \\
&= \int_0^4 ue^u du \quad \left[u = x^2, du = 2xdx\right] \\
&= ue^u|_0^4 - \int_0^4 e^u du \\
&= 4e^4 - e^4 + 1 = 1 + 3e^4
\end{aligned}$$