UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2022/2
Prova da área I

1	2	3	Total

Nome: gabarito ______________________________ **Cartão:** ______________

- **Questão 1** (0.9 ponto cada item) Considerando a trajetória parametrizada pela seguinte função:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + (1-t^2)\vec{k}, \quad t \geq 0,$$

está correto:

(A) tangente unitário $T(t) =$:

( ) $\vec{i} + 2t\vec{j} - 2t\vec{k}$

(X) $\dfrac{\vec{i} + 2t\vec{j} - 2t\vec{k}}{\sqrt{8t^2+1}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k}}{\sqrt{8t^2+1}}$

( ) $\vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k}$

( ) nenhuma das anteriores

(B) aceleração $\vec{a}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} =$:

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2t\vec{j} - 2t\vec{k}}{\sqrt{8t^2+1}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k}}{\sqrt{8t^2+1}}$

( ) $2\vec{i} - 2\vec{k}$

( ) $2\vec{i} + 2\vec{k}$

(X) nenhuma das anteriores

Solução: (A) $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j} - 2t\vec{k}, \quad t \geq 0,$

$$\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = \sqrt{1+4t^2+4t^2} = \sqrt{1+8t^2} \Rightarrow \vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|} = \frac{\vec{i} + 2t\vec{j} - 2t\vec{k}}{\sqrt{1+8t^2}}$$

Solução: (B) $\dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = 2\vec{j} - 2\vec{k}, \quad t \geq 0,$

(C) vetor normal unitário $\vec{N}(t)$ em $t = 1$:

(X) $\dfrac{-4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{3\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{-4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{3\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{-4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{3\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{3\sqrt{2}}$

( ) nenhuma das anteriores

(D) vetor binormal $\vec{B}(t)$ em $t = 1$:

( ) $\dfrac{-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{3}}$

( ) $\dfrac{\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$

(X) $\dfrac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: (C)

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\sqrt{1+8t^2}}\right]\vec{i} + \frac{d}{dt}\left[\frac{2t}{\sqrt{1+8t^2}}\right]\vec{j} - \frac{d}{dt}\left[\frac{2t}{\sqrt{1+8t^2}}\right]\vec{k} = -\frac{8t}{(1+8t^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{2}{(1+8t^2)^{3/2}}\vec{j} - \frac{2}{(1+8t^2)^{3/2}}\vec{k}$$

Em $t = 1$, $\dfrac{d\vec{T}}{dt} = \dfrac{-8\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{9^{3/2}}$ e portanto $\vec{N} = \dfrac{-4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{3\sqrt{2}}$

Solução: (D) usamos $\vec{T} = \dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{3}, \vec{N} = \dfrac{-4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{3\sqrt{2}}$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \vec{i}\left(\frac{-2+2}{9\sqrt{2}}\right) - \vec{j}\left(\frac{-1-8}{9\sqrt{2}}\right) + \vec{k}\left(\frac{1+8}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

(E) curvatura em $t = 1$:

( ) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(X) $\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$

( ) $\dfrac{27}{2\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

( ) nenhuma das anteriores

(F) aceleração normal em $t = 1$:

( ) $\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$

( ) 0

( ) $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$

(X) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

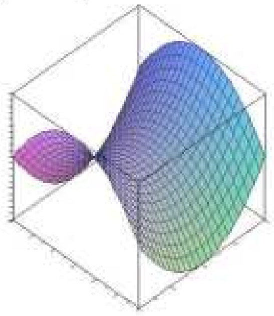
( ) nenhuma das anteriores

Solução: (E) em $t = 1$, $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ mas $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = 2\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$

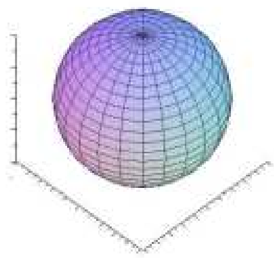
Portanto $\kappa = \dfrac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3} = \dfrac{|2\vec{j} + 2\vec{k}|}{|\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}|^3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3^3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{27}$

Solução: (F) em $t = 1$, $a_N = \dfrac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|} = \dfrac{|2\vec{j} + 2\vec{k}|}{|\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}|} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

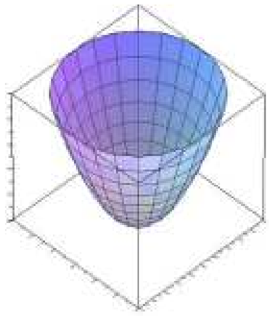
• **Questão 2** Considere a superfície parametrizada $\vec{r} = 4v\cos(u)\vec{i} + 3v\,\mathrm{sen}(u)\vec{j} + v^2\vec{k}$, $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 1$
(A)(0.6pt) marque a alternativa que melhor a representa:



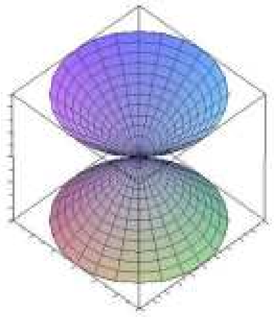
( )



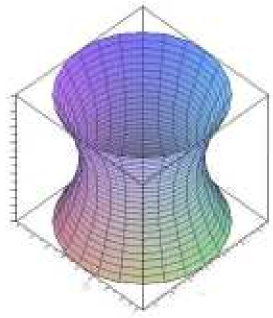
( )



(X)



( )



( )

( ) nenhuma das anteriores

(B) (1.0pt) Obtenha o vetor normal unitário $\vec{N}$ e equação cartesiana do plano tangente à superfície em $(u, v) = \left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$

Solução: (A) escrevendo $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ temos $x = 4v\cos(u)$, $y = 3v\,\mathrm{sen}(u)$, $z = v^2$

Implica $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = v^2\cos^2(u) + v^2\,\mathrm{sen}^2(u) = v^2 = z$ e portanto satisfaz $z = \dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{3^2}$, que é a equação cartesiana de um parabolóide elíptico.

Solução: (B) em $u = \dfrac{\pi}{4}, v = \sqrt{2}$ temos $\vec{r} = 4\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 3\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} + (\sqrt{2})^2\vec{k} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, e ainda

$$\frac{d\vec{r}}{du} = -4v\,\mathrm{sen}(u)\vec{i} + 3v\cos(u)\vec{j} = -4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 3\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$$
$$\frac{d\vec{r}}{dv} = 4\cos(u)\vec{i} + 3\cos(u)\vec{j} = 4\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 3\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + 2\sqrt{2}\vec{k} = 2\sqrt{2}\vec{i} + 3\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + 2\sqrt{2}\vec{k}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{r}}{du} \times \frac{d\vec{r}}{dv} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 3\frac{\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = (6\sqrt{2}-0)\vec{i} - (-8\sqrt{2}-0)\vec{j} + (-6\sqrt{2}-6\sqrt{2})\vec{k} = 2\sqrt{2}\left(3\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}\right)$$

e portanto $\vec{N} = \dfrac{3\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}}{\sqrt{61}}$ é o vetor normal unitário pedido. Combinando a informação de $\vec{r}$ e de $\vec{N}$, temos que uma equação cartesiana do plano tangente é $3(x-4)+4(y-3)-6(z-2)=0$.

• **Questão 3.** Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = (2x+z)\vec{i} + 2y\vec{j} + xy\vec{k}$.

(A) (1.0pt) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C é a curva definida por $\vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \le t \le \pi$.

(B) (1.0pt) Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$, onde S é a superfície lateral do cubo de arestas $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$ e $\vec{N}$ é o normal unitário voltado para o exterior.

(C) (1.0pt) Seja S_1 a superfície determinada pela face $y=0$ do cubo unitário de faces $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$. Seja C a curva segmentada, no bordo de S_1, que une os pontos $P_1(0,0,0)$, $P_2(1,0,0)$, $P_3(1,0,1)$, $P_4(0,0,1)$ e de volta a origem P_1, nesta ordem. Calcule o trabalho $\iint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

Solução (A): $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \vec{k}$ implica, ao longo da curva C,

$\vec{F}\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \Big[(2\cos(t)+t)\vec{i} + 2\operatorname{sen}(t)\vec{j} + \cos(t)\operatorname{sen}(t)\vec{k}\Big]\cdot\Big[-\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}\Big]$

$= -(2\cos(t)+t)\operatorname{sen}(t) + 2\operatorname{sen}(t)\cos(t) + \cos(t)\operatorname{sen}(t) = -t\operatorname{sen}(t) + \cos(t)\operatorname{sen}(t)$

Portanto $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^\pi \vec{F}\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt}dt = \int_0^\pi (-t\operatorname{sen}(t) + \cos(t)\operatorname{sen}(t))dt$

Entretanto $\int_0^\pi t\operatorname{sen}(t)dt = [-t\cos(t)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(t)dt = \pi + 0 = \pi$

Entretanto $\int_0^\pi \cos(t)\operatorname{sen}(t)dt = \int_0^\pi \dfrac{\operatorname{sen}(2t)}{2}dt = 0$ e temos $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_0^\pi t\operatorname{sen}(t)dt = -\pi$

Solução (B): calculamos o divergente de $\vec{F}$, $\operatorname{div}(\vec{F}) = \dfrac{\partial(2x+z)}{\partial x} + \dfrac{\partial(2y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(xy)}{\partial z} = 2+2=4$

Pelo Teorema do Divergente $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \iiint_G \operatorname{div}(\vec{F})dV$, onde G é o sólido determinado por tal cubo unitário. Segue $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \iiint_G (4)dV = 4\iiint_G dV = 4(1)^3 = 4$

Solução (C): usando o Teorema de Stokes. Calculamos o rotacional de $\vec{F}$

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x+z & 2y & xy \end{vmatrix} = x\vec{i} + (1-y)\vec{j} \Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{F}) = x\vec{i}+\vec{j} \text{ sobre a superfície } S_1$$

onde, ademais, temos $\vec{N} = -\vec{j}$, orientação esta que é compatível com a da curva C. Portanto

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oiint_{S_1} \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\vec{N}dS = \oiint_{S_1} (x\vec{i}+\vec{j})\cdot(-\vec{j})dS = -\int_{S_1} dS = -1$$

Solução direta de (C): observamos que no plano $y=0$ temos $\vec{F} = (2x+z)\vec{i}$. Seja C_1 o segmento $\overrightarrow{P_1P_2}$, parametrizado por $\vec{r} = t\vec{i}$ para $0\le t\le 1$; seja C_2 o segmento $\overrightarrow{P_2P_3}$, parametrizado por $\vec{r} = \vec{i}+t\vec{k}$, para $0\le t\le 1$; seja C_3 o segmento $\overrightarrow{P_2P_3}$, parametrizado por $\vec{r} = (1-t)\vec{i}+\vec{k}$, para $0\le t\le 1$; seja C_4 o segmento $\overrightarrow{P_3P_4}$, parametrizado por $\vec{r} = (1-t)\vec{k}$, para $0\le t\le 1$. Escrevendo $\vec{F} = \vec{F}(t)$ e $d\vec{r} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}dt$ em cada segmento:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} 2t\vec{i}\cdot\vec{i}dt + \int_{C_2}(2+t)\vec{i}\cdot\vec{k}dt + \int_{C_3}(3-2t)\vec{i}\cdot(-\vec{i})dt + \int_{C_4}(1-t)\vec{i}\cdot(-\vec{k})dt =$$
$$\int_0^1 (2t)dt + \int_0^1 (2t-3)dx = 1+1-3 = -1$$

□

Q3 b) CÁLCULO DIRETO

FACE 1 $\vec{N} = -\vec{k}$ $(z=0)$

$\vec{F} \cdot \vec{N} = -\vec{F} \cdot \vec{k} = -xy$

$$\iint_{F_1} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = -\int_0^1 \int_0^1 xy\,dx\,dy = -\int_0^1 x\,dx \int_0^1 y\,dy = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

FACE 2 $\vec{N} = -\vec{j}$ $(y=0)$

$\vec{F} \cdot \vec{N} = -\vec{F} \cdot \vec{j} = -2y = 0$

$$\iint_{F_2} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = 0$$

FACE 3 $\vec{N} = -\vec{i}$ $(x=0)$

$\vec{F} \cdot \vec{N} = -\vec{F} \cdot \vec{i} = -(2x+z) = -z$

$$\iint_{F_3} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \int_0^1 \int_0^1 (-z)\,dy\,dz = -\int_0^1 dy \int_0^1 z\,dz = -\frac{1}{2}$$

FACE 4 $\vec{N} = \vec{i}$ $(x=1)$

$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{F} \cdot \vec{i} = 2x+z = 2+z$

$$\iint_{F_4} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \int_0^1 \int_0^1 (2+z)\,dy\,dz = \left[2z + \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

FACE 5 $\vec{N} = \vec{j}$ $(y=1)$

$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{F} \cdot \vec{j} = 2y$

$$\iint_{F_5} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \int_0^1 \int_0^1 2\,dx\,dz = 2(1-0)(1-0) = 2$$

FACE 6 $\vec{N} = \vec{k}$ $(z=1)$

$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{F} \cdot \vec{k} = xy$

$$\iint_{F_6} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \int_0^1 \int_0^1 xy\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = -\frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + 2 + \frac{1}{4} = 4 \quad //$$