UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2022/2
Prova da área I

1-4	5	6	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\|}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\|}$
Curvatura	$\kappa = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \left\|\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\| = \frac{\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\|^2}$
Módulo da Torção	$\|\tau\| = \left\|\frac{d\vec{B}}{ds}\right\| = \left\|\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\|$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\|\vec{a}\times\vec{v}\|}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

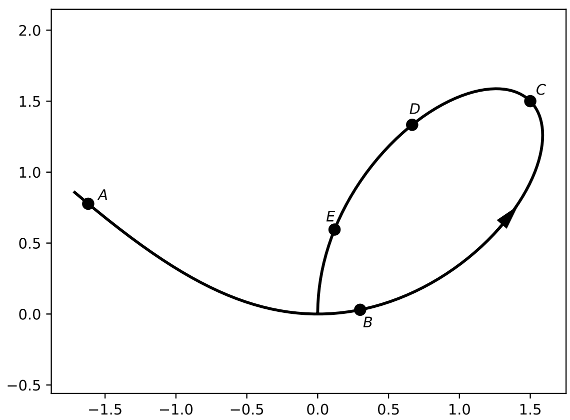
Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (0.5 ponto cada item) O Folium de Descartes é a curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \frac{3at}{1+t^3}\vec{i} + \frac{3at^2}{1+t^3}\vec{j}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Vamos considerar apenas a porção da curva com domínio $-\frac{1}{2} < t < \infty$ e $a = 1$, conforme esboço ao lado. Marque a resposta correta para cada coluna.



Tangente unitário em $t = 0$:

( ) $\vec{i}$

( ) $\vec{j}$

( ) $-\vec{i}$

( ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$

( ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)$

Normal unitário em $t = 0$:

( ) $-\vec{j}$

( ) $\vec{j}$

( ) $-\vec{i}$

( ) $\vec{i}$

( ) Nenhuma das anteriores

Dos pontos do plano xy listados, marque o de maior curvatura:

( ) A

( ) B

( ) C

( ) D

( ) E

Dos pontos do plano xy listados, marque o de menor curvatura:

( ) A

( ) B

( ) C

( ) D

( ) E

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Considere a trajetória de uma partícula com aceleração tangencial constante igual 2 ao longo da curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + t\vec{k}, \quad -0 \le t \le 1.$$

Sabendo que a velocidade escalar em $t = 0$ é zero, marque a resposta correta para cada coluna. Dica: a parametização dada não reflete a cinética do problema, apenas a geometria da curva.

Curvatura em $t = 1$

( ) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

( ) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

( ) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

( ) $\frac{1}{3}$

( ) $\sqrt{2}$

Torção em $t = 1$

( ) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

( ) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

( ) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

( ) $\frac{1}{3}$

( ) $\sqrt{2}$

Aceleração normal em $t = 1$

( ) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

( ) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

( ) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

( ) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

( ) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Velocidade escalar $t = 1$

( ) 1

( ) 2

( ) 3

( ) 4

( ) 5

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) Considere o campo vetorial $\vec{F} = ze^x\vec{i} - e^x\vec{j} + x\,\mathrm{sen}(z)\vec{k}$ e a curva C fechada no plano xy formada pelos lados do quadrado $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, orientada no sentido anti-horário. Marque a resposta correta para cada coluna.

$\vec{\nabla} \times \vec{F}$

( ) $\vec{0}$

( ) $ze^x\vec{i} + x\cos(z)\vec{k}$

( ) $(e^x - \mathrm{sen}(z))\vec{j} - e^x\vec{k}$

( ) $e^x\vec{i} + (e^x - \cos(z))\vec{j} - 2\,\mathrm{sen}(z)\vec{k}$

( ) $-e^x\vec{k}$

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

( ) 0

( ) $2e$

( ) $2e - 1$

( ) $2(1 - e)$

( ) $2(e^{-1} - e)$

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) Considere o campo vetorial $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, a curva $C : y = x^2$, $-1 \leq x \leq 2$, orientada no sentido $(-1, 1)$ até $(2, 4)$ e a superfície S dada por $z = 1 - x^2 - y^2$, acima do plano xy, orientada no sentido positivo do eixo z. Marque a resposta correta para cada coluna.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

( ) 7

( ) 9

( ) 13

( ) 17

( ) 18

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

( ) 0

( ) $\dfrac{\pi}{2}$

( ) π

( ) $\dfrac{3\pi}{2}$

( ) 2π

• **Questão 5** (2.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F} = (3yz^2 + z + 1)\vec{i} + 3xz^2\vec{j} + (6xyz + x)\vec{k}$ e a curva C dada por $\vec{r}(t) = e^{t-1}\vec{i} + (t^2 + 2t)\vec{j} + t^4\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$. Responda os itens abaixo.

a) (0.5 ponto) Mostre que $\vec{F}$ é um campo conservativo.

b) (0.5 ponto) Calcule o potencial de $\vec{F}$, isto é, o campo escalar φ tal que $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$.

c) (1.0 ponto) Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

• **Questão 6** (2.0 pontos) Considere S a superfície orientada para fora que contorna o sólido V limitado superiormente pelo plano $z = 1$ e inferiormente pela superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$ e o campo $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$.

a) (1.0 ponto) Calcule o valor de $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ usando integração direta.

b) (1.0 ponto) Calcule o valor de $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ usando o teorema da divergência.