1-4	5	6	Total

UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2022/2
Prova da área I

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}\,'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\lVert\vec{a}\times\vec{v}\rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

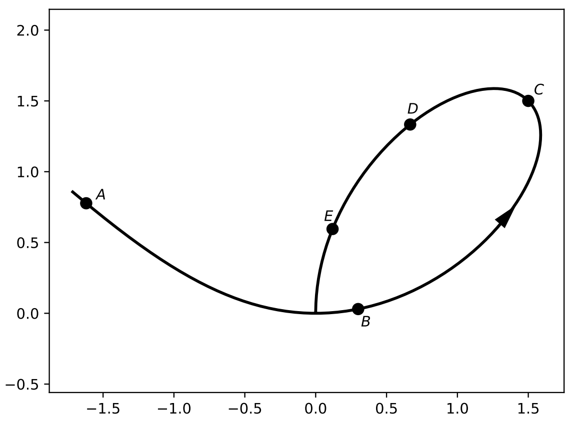
Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (0.5 ponto cada item) O Folium de Descartes é a curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \frac{3at}{1+t^3}\vec{i} + \frac{3at^2}{1+t^3}\vec{j}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Vamos considerar apenas a porção da curva com domínio $-\frac{1}{2} < t < \infty$ e $a = 1$, conforme esboço ao lado. Marque a resposta correta para cada coluna.



Tangente unitário em $t = 0$:

(X) $\vec{i}$

( ) $\vec{j}$

( ) $-\vec{i}$

( ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$

( ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{i} + \vec{j}\right)$

Normal unitário em $t = 0$:

( ) $-\vec{j}$

(X) $\vec{j}$

( ) $-\vec{i}$

( ) $\vec{i}$

( ) Nenhuma das anteriores

Dos pontos do plano xy listados, marque o de maior curvatura:

( ) A

( ) B

(X) C

( ) D

( ) E

Dos pontos do plano xy listados, marque o de menor curvatura:

(X) A

( ) B

( ) C

( ) D

( ) E

Solução: Observe que a curva está orientada no sentido positivo do eixo x é $\vec{r}(0) = \vec{0}$. Apenas observando a lista de opções, o vetor tangente unitário deve ser aquele onde a componente na direção x é a maior que as outras, no caso só pode ser $\vec{i}$. O normal unitário aponta para dentro da curvatura e é perpendicular a $\vec{T}$, logo, $\vec{N} = \vec{j}$. A análise dos pontos de maior e menor curvatura também é feita olhando o gráfico, sem fazer contas. A parte mais "fechada", curvatura maior, a parte mais próxima de uma reta, curvatura menor.

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Considere a trajetória de uma partícula com aceleração tangencial constante igual 2 ao longo da curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + t\vec{k}, \quad -0 \leq t \leq 1.$$

Sabendo que a velocidade escalar em $t = 0$ é zero, marque a resposta correta para cada coluna. Dica: a parametização dada não reflete a cinética do problema, apenas a geometria da curva.

Curvatura em $t = 1$

(X) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

( ) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

( ) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

( ) $\frac{1}{3}$

( ) $\sqrt{2}$

Torção em $t = 1$

( ) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

( ) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

( ) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

(X) $\frac{1}{3}$

( ) $\sqrt{2}$

Aceleração normal em $t = 1$

( ) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

( ) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

( ) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

( ) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

(X) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Velocidade escalar $t = 1$

( ) 1

(X) 2

( ) 3

( ) 4

( ) 5

Solução: Para torção e curvatura, calculamos as derivadas:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \frac{t^2}{2}\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + t\vec{k} \\
\vec{r}'(t) &= t\vec{i} + t^2\vec{j} + \vec{k} \\
\vec{r}''(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} \\
\vec{r}'''(t) &= 2\vec{j}.
\end{aligned}$$

Em $t = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\
\vec{r}''(t) &= \vec{i} + 2\vec{j} \\
\vec{r}'''(t) &= 2\vec{j}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\vec{r}' \times \vec{r}'' &= -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\
\|\vec{r}' \times \vec{r}''\| &= \sqrt{6} \\
\|\vec{r}'\| &= \sqrt{3} \\
\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' &= 2
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}^3} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} \\
\tau &= \frac{2}{\sqrt{6}^2} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Agora, sabendo que $a_T = v' = 2$, temos que $v(t) - v(0) = 2t$, ou seja, $v(t) = 2t$. Assim, $v(1) = 2$. Também,

$$a_N = v^2\kappa = 4\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$$

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) Considere o campo vetorial $\vec{F} = ze^x\vec{i} - e^x\vec{j} + x\,\mathrm{sen}(z)\vec{k}$ e a curva C fechada no plano xy formada pelos lados do quadrado $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, orientada no sentido anti-horário. Marque a resposta correta para cada coluna.

$\vec{\nabla} \times \vec{F}$

( ) $\vec{0}$

( ) $ze^x\vec{i} + x\cos(z)\vec{k}$

(X) $(e^x - \mathrm{sen}(z))\vec{j} - e^x\vec{k}$

( ) $e^x\vec{i} + (e^x - \cos(z))\vec{j} - 2\,\mathrm{sen}(z)\vec{k}$

( ) $-e^x\vec{k}$

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

( ) 0

( ) $2e$

( ) $2e - 1$

( ) $2(1 - e)$

(X) $2(e^{-1} - e)$

Solução: Cálculo do rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ze^x & -e^x & x\,\mathrm{sen}(z) \end{vmatrix} = (e^x - \mathrm{sen}(z))\vec{j} - e^x\vec{k}$$

Pelo teorema de Stokes, temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n}dS,$$

onde S é o plano $z = 0$ orientado no sentido $\vec{k}$ e domínio $-1 \le x, y \le 1$. Assim

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -e^x dxdy = -2\int_{-1}^{1} e^x dx = -2(e - e^{-1}).$$

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) Considere o campo vetorial $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, a curva $C : y = x^2$, $-1 \le x \le 2$, orientada no sentido $(-1, 1)$ até $(2, 4)$ e a superfície S dada por $z = 1 - x^2 - y^2$, acima do plano xy, orientada no sentido positivo do eixo z. Marque a resposta correta para cada coluna.

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

( ) 7

(X) 9

( ) 13

( ) 17

( ) 18

$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}dS$

( ) 0

( ) $\frac{\pi}{2}$

( ) π

(X) $\frac{3\pi}{2}$

( ) 2π

Solução: Uma parametrização para C é dada por $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{i}$, $-1 \le t \le 2$. Temos $\vec{r}' = \vec{i} + 2t\vec{j}$, $\vec{F}(\vec{r}(t)) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$ e

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{2} (t + 2t^3)dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{2^4 + 2^2 - (-1)^2 - (-1)^4}{2} = 9.$$

Agora, para fazer a integral de superfície, definimos $G = x^2 + y^2 + z - 1$. Temos $\vec{\nabla}G = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$. Assim,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}dS = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{\nabla}GdA,$$

onde $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + (1 - x^2 - y^2)\vec{k}$ e D é o disco unitário no plano xy. Assim,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}dS = \iint_D (2x^2 + 2y^2 + (1 - x^2 - y^2))dA = \iint_D (x^2 + y^2 + 1)dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2 + 1)rdrd\theta = 2\pi\left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2}.$$

• **Questão 5** (2.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F} = (3yz^2 + z + 1)\vec{i} + 3xz^2\vec{j} + (6xyz + x)\vec{k}$ e a curva C dada por $\vec{r}(t) = e^{t-1}\vec{i} + (t^2 + 2t)\vec{j} + t^4\vec{k}$, $0 \le t \le 1$. Responda os itens abaixo.

a) (0.5 ponto) Mostre que $\vec{F}$ é um campo conservativo.

b) (0.5 ponto) Calcule o potencial de $\vec{F}$, isto é, o campo escalar φ tal que $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$.

c) (1.0 ponto) Calcule a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução: a) Um campo é conservativo se, e somente se, for irrotacional.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3yz^2 + z + 1 & 3xz^2 & 6xyz + x \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Solução: b) Seja $\phi(x, y, z)$ o potencial, então

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (3yz^2 + z + 1) \Rightarrow \phi = 3xyz^2 + xz + x + C_1(y, z)$$

Agora, derivamos com respeito a y para obter a segunda componente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3xz^2 + \frac{\partial C_1(y, z)}{\partial y} = 3xz^2$$

Assim,

$$\frac{\partial C_1(y, z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow C_1(y, z) = C_2(z) \Rightarrow \phi = 3xyz^2 + xz + x + C_1(z)$$

Finalmente, derivamos com respeito a z para obter a última componente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 6xyz + x + \frac{\partial C_2(z)}{\partial z} = 6xyz + x$$

Logo,

$$\frac{\partial C_2(z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow C_2(z) = C \Rightarrow \phi = 3xyz^2 + xz + x + C$$

Solução: c) A integral de linha é a diferença de potencial

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(1)) - \phi(\vec{r}(0)) = \phi((1, 3, 1)) - \phi((e^{-1}, 0, 0)) = 9 + 1 + 1 - e^{-1} = 11 - e^{-1}$$

• **Questão 6** (2.0 pontos) Considere S a superfície orientada para fora que contorna o sólido V limitado superiormente pelo plano $z = 1$ e inferiormente pela superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$ e o campo $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$.

a) (1.0 ponto) Calcule o valor de $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ usando integração direta.

b) (1.0 ponto) Calcule o valor de $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ usando o teorema da divergência.

Solução a) Escreva $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ onde Φ_1 é a lateral e Φ_2 é o topo. Começamos calculando Φ_1:

$$\Phi_1 = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_A \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA$$

onde $G(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\vec{\nabla} G = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j} + \vec{k}$, assim

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G = -\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z^2$$

Convertendo para coordenadas polares, temos:

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G = -\frac{r^2}{r} + r^2 = r^2 - r$$

e

$$\Phi_1 = -\int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 - r) r dr d\theta = -2\pi \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

Agora, calculamos Φ_2:

$$\Phi_2 = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S (x\vec{i} + y\vec{j} + 1^2\vec{k}) \cdot \vec{k} dS = \iint_S 1 dS = \text{ área de S } = \pi$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$$

Solução b) Observe que $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2 + 2z$, assim

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= \iiint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\
&= 2 \iiint_S (1+z) dV \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 (1+z) r dz dr d\theta \\
&= 4\pi \int_0^1 \left[(z + \frac{z^2}{2}) r \right]_{z=r}^{z=1} dr \\
&= 4\pi \int_0^1 r \left[(1 + \frac{1^2}{2}) - (r + \frac{r^2}{2}) \right] dr \\
&= 4\pi \int_0^1 \left(\frac{3r}{2} - r^2 - \frac{r^3}{2} \right) dr \\
&= 4\pi \left[\frac{3r^2}{4} - \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{8} \right]_0^1 \\
&= 4\pi \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right]_0^1 = \frac{7\pi}{6}
\end{aligned}
$$