UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2022/2
Prova da área I

1-4	5	6	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\Vert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\Vert}$
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}\,'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

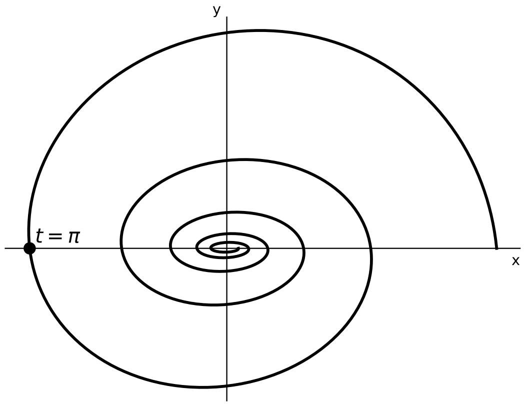
Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considere a espiral dada por

$$\vec{r}(t) = e^{-t/10}\cos(t)\vec{i} + e^{-t/7}\,\mathrm{sen}(t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 10\pi.$$

Marque a resposta correta para cada coluna. Dica: Analise o gráfico e as opções. Os vetores não estão normalizados por simplicidade.



Tangente em $t = \pi$:

( ) $e^{-\pi/10}\vec{i} - \dfrac{1}{7}e^{-\pi/7}\vec{j}$

( ) $-\dfrac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{i} - e^{-\pi/7}\vec{j}$

( ) $\dfrac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{i} - e^{-\pi/7}\vec{j}$

( ) $\dfrac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{i} + e^{-\pi/7}\vec{j}$

( ) $-\dfrac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{i} + e^{-\pi/7}\vec{j}$

Normal em $t = \pi$:

( ) $\dfrac{1}{7}e^{-\pi/7}\vec{i} + e^{-\pi/10}\vec{j}$

( ) $-e^{-\pi/7}\vec{i} - \dfrac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{j}$

( ) $e^{-\pi/7}\vec{i} - \dfrac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{j}$

( ) $e^{-\pi/7}\vec{i} + \dfrac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{j}$

( ) $-e^{-\pi/7}\vec{i} + \dfrac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{j}$

Dos pontos do plano xy listados, marque o de maior curvatura:

( ) $(1,0)$

( ) $\left(e^{-\pi/5}, 0\right)$

( ) $\left(e^{-2\pi/5}, 0\right)$

( ) $\left(e^{-3\pi/5}, 0\right)$

( ) $\left(e^{-4\pi/5}, 0\right)$

Dos pontos do plano xy listados, marque o de menor curvatura:

( ) $\left(0, e^{-17\pi/14}\right)$

( ) $\left(0, e^{-13\pi/14}\right)$

( ) $\left(0, e^{-9\pi/14}\right)$

( ) $\left(0, e^{-5\pi/14}\right)$

( ) $\left(0, e^{-\pi/14}\right)$

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Considere a trajetória de uma partícula com aceleração tangencial constante igual 3 ao longo da curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \mathrm{sen}(2t)\vec{i} + \cos(2t)\vec{j} + \mathrm{sen}(t)\vec{k}, \quad -0 \leq t \leq 2\pi.$$

Sabendo que a velocidade escalar em $t = 0$ é $\dfrac{\pi}{2}$, marque a resposta correta para cada coluna. Dica: a parametização dada não reflete a cinética do problema, apenas a geometria da curva.

Curvatura em $t = \dfrac{\pi}{2}$

( ) $\dfrac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$

( ) $\dfrac{2}{17}$

( ) $\dfrac{2}{\sqrt{17}}$

( ) 0

Torção em $t = \dfrac{\pi}{2}$

( ) $\dfrac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$

( ) $\dfrac{2}{17}$

( ) $\dfrac{2}{\sqrt{17}}$

( ) 0

Aceleração normal em $t = \dfrac{\pi}{2}$

( ) $\dfrac{\pi^2\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{\pi^2\sqrt{17}}{4}$

( ) $\dfrac{2\pi^2}{17}$

( ) $\dfrac{2\pi^2}{\sqrt{17}}$

( ) $\pi^2\sqrt{17}$

Velocidade escalar $t = \dfrac{\pi}{2}$

( ) π

( ) 2π

( ) 3π

( ) 4π

( ) 5π

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) Considere o campo vetorial $\vec{F} = (z + x^3)\vec{i} + (\mathrm{sen}(x) + y^3)\vec{j} + (xy + z^3)\vec{k}$ e a superfície formada pela esféra de raio a centrada na origem, orientada para fora. Marque a resposta correta para cada coluna.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

( ) 0

( ) $1 + 3x^2 + \cos(x) + 3y^2 + x + y + 3z^2$

( ) $z + x^3 + \mathrm{sen}(x) + y^3 + xy + z^3$

( ) $z + 3x^2 + \mathrm{sen}(x) + 3y^2 + xy + 3z^2$

( ) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2$

$\displaystyle\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$

( ) $\dfrac{12\pi a^5}{5}$

( ) $\dfrac{3\pi a^5}{5}$

( ) $\dfrac{\pi a^4}{4}$

( ) πa^4

( ) 0

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) Considere o campo vetorial $\vec{F} = y\vec{i} + 2x\vec{j} + z\vec{k}$, a curva C dada pelo triângulo no plano xy de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$, orientada no <u>sentido horário</u> e a superfície S dada por $x + y + z = 1$, primeiro octante, orientada no sentido origem para o primeiro octante. Marque a resposta correta para cada coluna.

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$	$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$
( ) $-\frac{1}{6}$	( ) $\frac{1}{6}$
( ) $-\frac{1}{3}$	( ) $\frac{1}{3}$
( ) $-\frac{1}{2}$	( ) $\frac{2}{3}$
( ) $-\frac{5}{6}$	( ) $\frac{5}{6}$
( ) -1	( ) 1

• **Questão 5** (2.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + xyz\vec{k}$ e as curvas C_1 dada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$ e C_2 dada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$. Observe que ambas as curvas iniciam no ponto $(0,0,0)$ e terminam no ponto $(1,1,1)$. Responda os itens abaixo.

a) (0.5 ponto) Mostre que $\vec{F}$ não é um campo conservativo.

b) (0.5 ponto) Calcule a integral de linha $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

c) (0.5 ponto) Calcule a integral de linha $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

d) (0.5 ponto) Discuta a luz do teorema fundamental das linhas os itens a) b) e c).

• **Questão 6** (2.0 pontos) Considere a circunferência que limita a superfície aberta de equação

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \leq z \leq 1$$

orientada no sentido anti-horário (em relação ao eixo z) e o campo $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + yz\vec{k}$.

(a) (1.0 ponto) Calcule o valor de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando integração direta.

(b) (1.0 ponto) Calcule o valor de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando o teorema de Stokes.