UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2022/2
Prova da área I

1-4	5	6	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = G \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - F \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

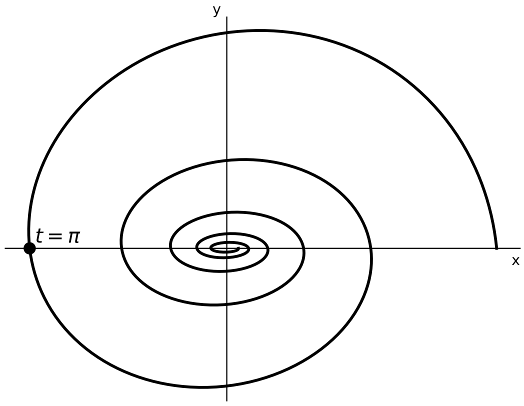
Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)\|}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)}{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|}$
Curvatura	$\kappa = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \left\|\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\| = \frac{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)) \cdot \vec{r}\,'''(t)}{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\|\frac{d\vec{B}}{ds}\right\| = \left\|\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\|$?
Aceleração normal	$a_N = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considere a espiral dada por

$$\vec{r}(t) = e^{-t/10}\cos(t)\vec{i} + e^{-t/7}\,\mathrm{sen}(t)\vec{j}, \quad 0 \le t \le 10\pi.$$



Marque a resposta correta para cada coluna. Dica: Analise o gráfico e as opções. Os vetores não estão normalizados por simplicidade.

Tangente em $t = \pi$:

( ) $e^{-\pi/10}\vec{i} - \frac{1}{7}e^{-\pi/7}\vec{j}$

( ) $-\frac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{i} - e^{-\pi/7}\vec{j}$

(X) $\frac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{i} - e^{-\pi/7}\vec{j}$

( ) $\frac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{i} + e^{-\pi/7}\vec{j}$

( ) $-\frac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{i} + e^{-\pi/7}\vec{j}$

Normal em $t = \pi$:

( ) $\frac{1}{7}e^{-\pi/7}\vec{i} + e^{-\pi/10}\vec{j}$

( ) $-e^{-\pi/7}\vec{i} - \frac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{j}$

( ) $e^{-\pi/7}\vec{i} - \frac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{j}$

(X) $e^{-\pi/7}\vec{i} + \frac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{j}$

( ) $-e^{-\pi/7}\vec{i} + \frac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{j}$

Dos pontos do plano xy listados, marque o de maior curvatura:

( ) $(1, 0)$

( ) $\left(e^{-\pi/5}, 0\right)$

( ) $\left(e^{-2\pi/5}, 0\right)$

( ) $\left(e^{-3\pi/5}, 0\right)$

(X) $\left(e^{-4\pi/5}, 0\right)$

Dos pontos do plano xy listados, marque o de menor curvatura:

(X) $\left(0, e^{-17\pi/14}\right)$

( ) $\left(0, e^{-13\pi/14}\right)$

( ) $\left(0, e^{-9\pi/14}\right)$

( ) $\left(0, e^{-5\pi/14}\right)$

( ) $\left(0, e^{-\pi/14}\right)$

Solução: Observe que a curva está orientada no sentido anti-horário é $\vec{r}(\pi)$ está marcado na figura. Apenas observando a lista de opções, o vetor que está na direção e sentido do tangente deve ser aquele onde a componente na direção y é negativa e maior que as outras em módulo, que no caso só pode ser $\frac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{i} - e^{-\pi/7}\vec{j}$. O normal aponta para dentro da curvatura e é perpendicular a $\vec{T}$, logo, deve estar no sentido e direção do vetor $e^{-\pi/7}\vec{i} + \frac{1}{10}e^{-\pi/10}\vec{j}$. A análise dos pontos de maior e menor curvatura também é feita olhando o gráfico, sem fazer contas. A parte mais "fechada", curvatura maior, a parte mais próxima de uma reta, curvatura menor.

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Considere a trajetória de uma partícula com aceleração tangencial constante igual 3 ao longo da curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \mathrm{sen}(2t)\vec{i} + \cos(2t)\vec{j} + \mathrm{sen}(t)\vec{k}, \quad -0 \le t \le 2\pi.$$

Sabendo que a velocidade escalar em $t = 0$ é $\frac{\pi}{2}$, marque a resposta correta para cada coluna. Dica: a parametização dada não reflete a cinética do problema, apenas a geometria da curva.

Curvatura em $t = \frac{\pi}{2}$

( ) $\frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}$

(X) $\frac{\sqrt{17}}{4}$

( ) $\frac{2}{17}$

( ) $\frac{2}{\sqrt{17}}$

( ) 0

Torção em $t = \frac{\pi}{2}$

( ) $\frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}$

( ) $\frac{\sqrt{17}}{4}$

( ) $\frac{2}{17}$

( ) $\frac{2}{\sqrt{17}}$

(X) 0

Aceleração normal em $t = \frac{\pi}{2}$

( ) $\frac{\pi^2\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}$

( ) $\frac{\pi^2\sqrt{17}}{4}$

( ) $\frac{2\pi^2}{17}$

( ) $\frac{2\pi^2}{\sqrt{17}}$

(X) $\pi^2\sqrt{17}$

Velocidade escalar $t = \frac{\pi}{2}$

( ) π

(X) 2π

( ) 3π

( ) 4π

( ) 5π

Solução: Para torção e curvatura, calculamos as derivadas:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \mathrm{sen}(2t)\vec{i} + \cos(2t)\vec{j} + \mathrm{sen}(t)\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= 2\cos(2t)\vec{i} - 2\,\mathrm{sen}(2t)\vec{j} + \cos(t)\vec{k} \\
\vec{r}\,''(t) &= -4\,\mathrm{sen}(2t)\vec{i} - 4\cos(2t)\vec{j} - \mathrm{sen}(t)\vec{k} \\
\vec{r}\,'''(t) &= -8\cos(2t)\vec{i} + 8\,\mathrm{sen}(2t)\vec{j} - \cos(t)\vec{k}.
\end{aligned}$$

Em $t = \pi/2$, temos:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= -2\vec{i} \\ \vec{r}'' &= 4\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{r}''' &= 8\vec{i}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \vec{r}' \times \vec{r}'' &= -8\vec{k} - 2\vec{j} \\ \|\vec{r}' \times \vec{r}''\| &= \sqrt{68} \\ \|\vec{r}'\| &= 2 \\ \vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\sqrt{68}}{2^3} = \frac{\sqrt{17}}{4} \\ \tau &= 0. \end{aligned}$$

Agora, sabendo que $a_T = v' = 3$, temos que $v(t) - v(0) = 3t$, ou seja, $v(t) = 3t + \frac{\pi}{2}$. Assim, $v(\frac{\pi}{2}) = 2\pi$. Também,

$$a_N = v^2\kappa = \pi^2\sqrt{17}$$

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) Considere o campo vetorial $\vec{F} = (z + x^3)\vec{i} + (\text{sen}(x) + y^3)\vec{j} + (xy + z^3)\vec{k}$ e a superfície formada pela esféra de raio 3 centrada na origem, orientada para fora. Marque a resposta correta para cada coluna.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

( ) 0

( ) $1 + 3x^2 + \cos(x) + 3y^2 + x + y + 3z^2$

( ) $z + x^3 + \text{sen}(x) + y^3 + xy + z^3$

( ) $z + 3x^2 + \text{sen}(x) + 3y^2 + xy + 3z^2$

(X) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2$

$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS$

(X) $\frac{12\pi a^5}{5}$

( ) $\frac{3\pi a^5}{5}$

( ) $\frac{\pi a^4}{4}$

( ) πa^4

( ) 0

Solução:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS &= \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a (3r^2)(r^2 \,\text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi \\ &= 6\pi \left(\int_0^a r^4 \right) \left(\int_0^{\pi} \text{sen}(\theta) \right) \\ &= 6\pi \left(\frac{a^5}{5} \right)(2) \end{aligned}$$

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) Considere o campo vetorial $\vec{F} = y\vec{i} + 2x\vec{j} + z\vec{k}$, a curva C dada pelo triângulo no plano xy de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$, orientada no sentido horário e a superfície S dada por $x + y + z = 1$, primeiro octante, orientada no sentido origem para o primeiro octante. Marque a resposta correta para cada coluna.

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$	$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$
( ) $-\frac{1}{6}$	( ) $\frac{1}{6}$
( ) $-\frac{1}{3}$	( ) $\frac{1}{3}$
(X) $-\frac{1}{2}$	(X) $\frac{2}{3}$
( ) $-\frac{5}{6}$	( ) $\frac{5}{6}$
(-1	( ) 1

Solução do item a:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint (-\vec{k}) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} dS \\ &= -\iint \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x) - \frac{\partial}{\partial y} y \right) dS = -2\frac{1}{2} = -1.\end{aligned}$$

Solução do item b: Inserimos a mudança de variável:

$$\begin{aligned} G(x,y,z) &= z + 1 + x + y, \\ \vec{\nabla} G(x,y,z) &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \\ \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G(x,y,z) &= y + 2x + z = y + 2x + (1 - x - y) = 1 + x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+x) dy dx \\ &= \int_0^1 (1+x)(1-x) dx \\ &= \int_0^1 (1 - x^2) dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

• **Questão 5** (2.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + xyz\vec{k}$ e as curvas C_1 dada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \le t \le 1$ e C_2 dada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $0 \le t \le 1$. Observe que ambas as curvas iniciam no ponto $(0,0,0)$ e terminam no ponto $(1,1,1)$. Responda os itens abaixo.

a) (0.5 ponto) Mostre que $\vec{F}$ não é um campo conservativo.

b) (0.5 ponto) Calcule a integral de linha $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

c) (0.5 ponto) Calcule a integral de linha $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

d) (0.5 ponto) Discuta a luz do teorema fundamental das linhas os itens a) b) e c).

Solução: a) Um campo é conservativo se, e somente se, for irrotacional.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & xyz \end{vmatrix} = xz\vec{i} - yz\vec{j} + 2\vec{k} \neq \vec{0}$$

Solução: b) Temos $\vec{r}' = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{F}(\vec{r}(t)) = -t\vec{i} + t\vec{j} + t^3\vec{k}$. Assim:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$$

Solução: c) Temos $\vec{r}' = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ e $\vec{F}(\vec{r}(t)) = -t^2\vec{i} + t\vec{j} + t^6\vec{k}$. Assim:

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (-t^2 + 2t^2 + 3t^8) dt = \int_0^1 (t^2 + 3t^8) dt = \frac{1}{3} + \frac{3}{9} = \frac{2}{3}.$$

Solução: d) Observe que as duas curvas começam e terminam no mesmo ponto, a saber, $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$. O fato das integrais de linha dos itens a) e b) darem valores distintos não contradiz o resultado do Teorema Fundamental das Linhas, visto que o campo não é conservativo.

• **Questão 6** (2.0 pontos) Considere a circunferência que limita a superfície aberta de equação

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ 0 \le z \le 1$$

orientada no sentido anti-horário (em relação ao eixo z) e o campo $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + yz\vec{k}$.

(a) (1.0 ponto) Calcule o valor de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando integração direta.

(b) (1.0 ponto) Calcule o valor de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando o teorema de Stokes.

Solução: a) Uma parametrização para a circunferência no plano $z = 1$ é dada por $\vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + \vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $\vec{r}' = -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$ e $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \operatorname{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + \operatorname{sen}(t)\vec{k}$, temos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2(t) - \cos^2(t))dt = -\int_0^{2\pi} 1dt = -2\pi.$$

Solução: b) Temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & yz \end{vmatrix} = z\vec{i} - 2\vec{k}.$$

Pelo teorema de Stokes

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Como $S: \; z = \sqrt{x^2 + y^2}$, escolhemos $G = z - \sqrt{x^2 + y^2}$ e temos

$$\vec{\nabla} G = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j} + \vec{k}.$$

Dado que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = z\vec{i} - 2\vec{k} = \sqrt{x^2 + y^2}\vec{i} - 2\vec{k}$ e $\vec{n} = \vec{k}$, temos:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_D (-2) dA = -2\pi. \end{aligned}$$