UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2023/1
Prova da área I

1-4	5	6	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\\|}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|}$
Curvatura	$\kappa = \left\\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\\| = \left\\|\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\| = \frac{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|}{\\|\vec{r}\,'(t)\\|^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|^2}$
Módulo da Torção	$\|\tau\| = \left\\|\frac{d\vec{B}}{ds}\right\\| = \left\\|\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\|$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\\|\vec{a}\times\vec{v}\\|}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considere a hélice circular não uniforme dada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + e^t\vec{k}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Marque a resposta correta para cada coluna.

Normal unitário em $t = 0$:

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

Binormal unitário em $t = 0$:

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

Curvatura em $t = 0$:

( ) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

( ) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}$

( ) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

( ) $\kappa(0) = \frac{2}{3}$

( ) $\kappa(0) = \frac{1}{3}$

Torção em $t = 0$:

( ) $\tau(0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

( ) $\tau(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}$

( ) $\tau(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

( ) $\tau(0) = \frac{2}{3}$

( ) $\tau(0) = \frac{1}{3}$

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Uma abelha viaja sobre uma trajetória $\vec{r}(t)$ com velocidade $\vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + \vec{k}$, $0 \le t \le 1$. Sabendo que a abelha passa pelo ponto $(1, 1, 1)$ em $t = 0$, marque a resposta correta para cada coluna.

Posição da abelha $\vec{r}(t)$

( ) $\vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + t\vec{k}$

( ) $\vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)\vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} + 1\right)\vec{j} + (t+1)\,\vec{k}$

( ) $\vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)\vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} + 1\right)\vec{j} + t\vec{k}$

( ) $\vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + \vec{k}$

( ) $\vec{r}(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}$

Componente tangencial da aceleração a_T

( ) $a_T = \frac{1+t}{\sqrt{t^2+t+1}}$

( ) $a_T = \frac{t+2t^2}{\sqrt{t^3+t^2+t}}$

( ) $a_T = \frac{1+t^2}{\sqrt{t^4+t^2+t}}$

( ) $a_T = \frac{t+2t^3}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

( ) $a_T = \frac{1+2t}{\sqrt{t^2+t+1}}$

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) Considere a superfície fechada limitada pelos plano $x = \pm 2$, $y = \pm 2$ e $z = \pm 2$, orientada para fora, e o campo $\vec{F} = -2(z^2+1)xy\vec{i} + (z^2+1)y^2\vec{j} + xyz^2\vec{k}$.

Divergente

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -2(z^2+1)xy + (z^2+1)y^2 + xyz^2$

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -2(z^2+1)x + xyz^2$

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -2(z^2+1)x + xyz$

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -(z^2+1)y + 2xyz$

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2xyz$

Integral de superfície

( ) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$

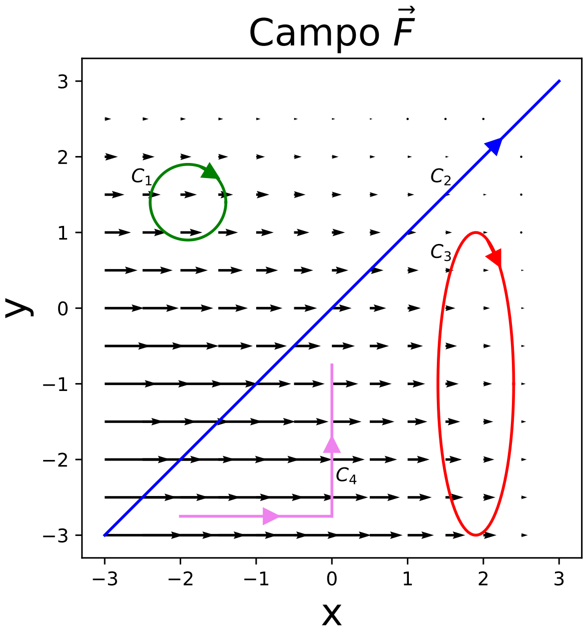
( ) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 4$

( ) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 8$

( ) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 16$

( ) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 24$

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) A figura ao lado apresenta o corte $z = 0$ de um campo $\vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{i}$ e as seguintes quatro curvas orientadas: C_1 é um círculo, C_2 é um segmento de reta, C_3 é uma elipse e C_4 é a união de dois segmentos de reta. Considere também a esfera S_1 centrada na origem, raio 2 e orientada para fora e o plano S_2 dado por $x = 0$, $-2 \leq y \leq 2$, $-2 \leq z \leq 2$, orientado no sentido de $\vec{i}$.
Marque a resposta correta para cada coluna.



Integral de linha:

( ) $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$

( ) $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

( ) $\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

( ) $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$

( ) $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} > \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Integral de Superfície:

( ) $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$

( ) $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > 0$

( ) $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS < 0$

( ) $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS < 0$

( ) $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$

Curvatura:

( ) A curvatura é uma constante para cada curva.

( ) A curvatura é zero para C_1 e C_2.

( ) A curvatura não é constante para C_1 e C_3

( ) Os pontos de maior curvatura estão sobre a curva C_3

( ) A curvatura sobre C_2 cresce da esquerda para direita.

Rotacional:

( ) $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} > 0$ em todos os pontos.

( ) $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} < 0$ em todos os pontos.

( ) $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} = 0$ em todos os pontos.

( ) $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{i} > 0$ em todos os pontos

( ) $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{j} > 0$ em todos os pontos

• **Questão 5** (1.0 ponto) Sejam a_N e a_T indicam as acelerações normal e tangencial, respectivamente. Prove algebricamente a expressão dada por:

$$\|\vec{a}\|^2 = a_N^2 + a_T^2$$

onde $\vec{a}$ é o vetor aceleração. Faça uma interpretação geométrica.

- **Questão 6** (3.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F} = xz\vec{i} + x\vec{j} + \dfrac{y^2}{2}\vec{k}$, a superfície S_1 formada pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ e a superfície S_2 formada pelo cone $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$, ambas orientada no sentido positivo do eixo z.

   a) (1.5) Calcule as seguintes integrais de superfície:

   $$\iint_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS$$

   e

   $$\iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS.$$

   convertendo-as em integrais duplas iteradas (sem usar o teoremas de Stokes).

   b) (1.0) Use o teorema de Stokes para justificar o resultado do item a).

   c) (0.5) Usando o resultado do item a) e o teorema do Stokes, é possível calcular o valor da integral

   $$\iint_{D} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS.$$

   onde D é disco unitário no plano xy dado por $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$?